С. А. АШМАНОВ

Математические модели и методы в экономике

МГУ

С. А. АШМАНОВ

Математические модели и методы в экономике

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Экономическая кибернетика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 1980

УДК 51:330.115

Рецензенты:
Кафедра теоретической кибернетики
Новосибирского университета;
докт. физ.-мат. наук
А. А. ПЕТРОВ

Ашманов С. А.
Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 199 с., 9 ил. Библиогр. 44 назв.

Пособие предназначено для первоначального знакомства с экономико-математическим моделированием и рассчитано на математически подготовленного читателя. Излагаются наиболее популярные классические модели Леонтьева, Неймана, Гейла, модель общего равновесия. Проводятся анализ свойств этих моделей и обсуждение экономических выводов из математических фактов. Заключительная часть книги посвящена теории производственных функций.

$$A \frac{20204-090}{077(02)-80} 100-80 \qquad 0601000000$$

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие возникло на материале курса лекций, читавшегося автором в течение ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга задумана как начальное пособие для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Цель пособия — дать представление об основных принципах построения математических моделей экономических процессов и явлений и о специфических с математической точки зрения методах их исследования.

Из всего многообразия экономико-математических моделей выбрано несколько наиболее содержательных и в то же время не слишком громоздких. На этих примерах показаны самые существенные проблемы, возникающие в процессе моделирования экономической реальности, и результаты, которые можно получить на этом пути. Автор не стремился к наибольшей общности получаемых математических фактов и теорем, пытаясь добиться прозрачности изложения и обращая особое внимание на возможные экономические интерпретации.

Относительно математического аппарата, используемого в книге, можно сказать следующее. Университетский курс математического анализа считается известным. Предполагается, что читатель знаком с основными фактами теории экстремальных задач: теорией двойственности в линейном программировании, принципом максимума Понтрягина для задач оптимального управления (на факультете ВМиК МГУ эти теории в той или иной степени входят в программу обязательных курсов). В связи с этим автор счел возможным ограничиться лишь формулировкой соответствующих теорем. В остальном изложение в книге замкнуто — все необходимые факты доказываются. Исключение составляет теорема Какутани о неподвижной точке многозначного отображения — ее доказательство не приводится, однако теорема активно используется.

Автор выражает признательность своим коллегам по кафедре исследования операций факультета ВМиК МГУ за постоянную помощь и внимание при работе над этой книгой.

Введение

Математическая экономика как самостоятельная наука, являющаяся частью прикладной математики, оформилась сравнительно недавно — за последние 20—30 лет. Вместе с тем если попытаться выяснить, когда в экономическую науку начали проникать математические идеи и методы, то придется обратиться к моменту возникновения экономических теорий — политической экономии.

Еще в середине XVIII в. лейб-медик короля Людовика XV Франсуа Кенэ предложил количественную модель национальной экономики, которую он назвал «Экономической таблицей». В первом фундаментальном труде по политической экономии — знаменитой книге Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства нации», изданной в Лондоне в 1776 г., — при внимательном чтении можно за характерными для того времени многословными рассуждениями увидеть изложение некоторых математически строгих закономерностей, присущих многим экономическим явлениям. В последующих работах экономистов XIX в. математические символы и способы описания стали применяться все более последовательно.

Плодотворность подхода к изучению законов экономического развития с помощью построения и исследования подходящей формальной (в той или иной степени) модели блестяще была продемонстрирована К. Марксом[1] при анализе построенных им схем простого и расширенного производства. К. Маркс прямо ставил вопрос

---

[1] См.: Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 24.

о необходимости математически строгого вывода основных закономерностей капиталистического способа производства [2].

Большинство ученых-экономистов, стоявших у истоков зарождения математической экономики и наиболее последовательно придерживавшихся формально-математических способов описания и изучения различных экономических ситуаций, в силу исторических причин стояли на буржуазных позициях. Однако критический подход с позиций марксистско-ленинской теории позволил уже в XX в. отобрать все положительное из разработанных ими теорий и методов. Здесь следует сказать о том, что хотя многие результаты буржуазных ученых-экономистов относительно состояний равновесия экономики и путей оптимального развития были получены в применении к капиталистической экономике с учетом конкуренции и других особенностей капитализма, тем не менее наиболее естественное свое выражение они получают в плановом социалистическом хозяйстве, предоставляющем наилучшие возможности для претворения в жизнь практических рекомендаций, вытекающих из математической теории.

Упомянем книгу французского ученого А. Курно «Исследование о математических принципах теории богатств», вышедшую в свет в Париже в 1838 г., где впервые систематически используются математические методы. Выдающимся представителем математического направления в экономике того времени был Леон Вальрас. В своей книге, вышедшей в Лозанне в 1874 г., Вальрас писал: «Чистая теория экономики есть наука, напоминающая во всем физико-математические науки» [1, с. 71]. Заслугой Л. Вальраса является не только то, что он ясно определил роль и место математических методов в изучении экономии (об этом см. ниже), но и продемонстрировал практически их возможности. Его теория общего конкурентного равновесия являлась в течение многих лет движущим фактором развития этих методов.

Интересна мысль Л. Вальраса о соотношении математико-экономической теории с экономической практи-

[2] См.: Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 33, с. 72.

кой. Так же, как в физико-математических науках, мы «должны взять из практики основные понятия такие, как обмен, спрос, предложение, рынок, капитал, доход, услуги, продукты. От этих реальных понятий надо абстрагироваться и определить соответствующие идеальные понятия. Обращение к действительности и практическому применению затем возможно только после создания теории...». «Я не утверждаю, что этим исчерпывается вся экономика. Например, сила и скорость также суть измеримые понятия, однако математическая теория силы и скорости не исчерпывает механики. Тем не менее теоретическая механика, несомненно, должна предшествовать прикладной. Точно так же чистая экономика должна предшествовать прикладной экономике...» [1, с. 71].

XX в. явился переломным в развитии математической экономики вследствие появления первого в мире социалистического государства с плановым хозяйством. На повестку дня встал вопрос о применении имеющихся методов планирования народного хозяйства и разработке новых. Так, уже в середине 20-х годов была предпринята попытка количественного описания существующей структуры народного хозяйства нашей страны с помощью метода, положенного позднее в основу межотраслевого баланса.

Проблема практического применения экономико-математического моделирования для задач планирования и управления общественным производством сложна и многогранна, и мы здесь не в состоянии осветить ее сколько-нибудь подробно.

Вопрос об адекватности математической модели описываемой экономической структуре содержит в себе все особенности и сложности аналогичного вопроса о моделировании вообще, идет ли речь о физической, математической или иной модели. Любая модель любого явления предполагает абстрагирование от многих реальных свойств объекта, его огрубление в разной степени, рассмотрение лишь основных его свойств, исходя из целей моделирования. В этом смысле всякая модель плоха и легко уязвима для критики.

Что же касается моделирования в экономике, то здесь реальный объект по своей сложности превосходит многие объекты физической природы. Вместе с тем проверка адекватности экономико-математической модели с помощью единственного критерия истины — практики — затруднена, поскольку практический эксперимент связан зачастую с колоссальными затратами и поэтому не всегда возможен.

Большое число математических моделей за последнее время успешно зарекомендовали себя, принося практический эффект. В первую очередь к ним следует отнести класс моделей линейного программирования типа задачи о раскрое, задачи о рационе, транспортной задачи и т. д. Правда, с нашей точки зрения эти модели скорее отвечают термину «технологическая модель», нежели экономико-математическая, ибо они, как правило, затрагивают лишь малый участок народного хозяйства и в них не возникает собственно экономических проблем типа вопроса об использовании структуры цен как рычага управления.

Опыт же практического применения более содержательных с экономической точки зрения экономико-математических моделей пока невелик. Так, первые подробные отчетные межотраслевые балансы производства и распределения продукции в народном хозяйстве СССР были составлены для 1959 и 1966 годов. В последнее время более интенсивно ведется моделирование народного хозяйства на отраслевом уровне средствами теории производственных функций.

Стремление приблизить экономико-математическое моделирование к реальности, сделать модели более «вычислимыми», учитывающими реально существующую статистику, ее доступность, непосредственно прослеживается в истории развития этой теории. Если модель общего равновесия Вальраса образца 1870 г. является полностью дезагрегированной, что делает ее чисто теоретической, то в моделях Леонтьева и Неймана дезагрегация не идет дальше понятия «отрасль», а производственная функция оперирует такими предельно агрегированными показателями, как национальный доход, объем основных ресурсов и т. д. Кроме перечисленных имеется большое число «промежуточных» моделей, описывающих разные участки народного хозяйства, отличающихся степенью подробности и другими свойствами, однако основные методологические приемы их построения и средства исследования имеют много общего с указанными классическими моделями.

На раннем этапе развития математической экономики в XVIII—XIX вв. основным математическим аппаратом, естественно, было дифференциальное и интегральное исчисление. С течением времени стала очевидной недостаточность этого аппарата.

Начиная с 30-х годов нашего столетия в экономику проникают новые методы исследования, связанные с понятиями выпуклых конусов, многозначных отображений, теоремой о неподвижной точке, теорией положительных матриц и т. д. Благодаря этому удалось существенно продвинуться в исследовании моделей и явлений, не поддавшихся изучению прежними методами. Вместе с тем характерной особенностью этого периода развития математической экономики является не только интенсификация работ над старыми проблемами, но и стремление распространить применение математических методов на ситуации совершенно нового типа — самым разительным примером является возникновение теории игр. В настоящее время три математические теории являются основным инструментом при исследовании экономико-математических задач. Мы имеем в виду линейное программирование, теоремы о неподвижной точке и теорию неотрицательных матриц. Все большую роль начинают играть различные формы принципа максимума в динамических задачах.

За последнее время вышло несколько монографий, посвященных той же теме, что предлагаемый курс лекций: X. Никайдо [2], К. Ланкастера [3], М. Моришимы [4], Ю. Н. Черемных [5], В. Л. Макарова и А. М. Рубинова [6], М. Интрилигатора [7], И. А. Красса [8] и др. Одни из них посвящены определенной, узкой теме, другие, как книга X. Никайдо, представляют собой энциклопедию современного состояния математической экономики.

Автор надеется, что знакомство с материалом лекций облегчит читателю изучение более полных руководств по теории математической экономики и позволит разобраться в большой массе конкретных практических моделей, которые все чаще используют при планировании в реальной экономике.

Обозначения

R^n — n-мерное евклидово пространство.

Пусть $x \in R^n$ — произвольный вектор, x_i — i-тая координата x, $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x|=(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$.

Через 0 обозначается как число, так и нулевой вектор.

(x, y) — скалярное произведение векторов x и y.

Мы пишем $x \geqslant y (x>y)$, если $x_i \geqslant y_i (x_i>y_i)$ для всех i.

R^n_+ — множество всех $x \in R^n$, $x \geqslant 0$.

R^n_- —множество всех $x \in R^n$, $x \leqslant 0$.

Пусть $A=(a_{ij})$ — произвольная $(m \times n)$-матрица (m строк, n столбцов). Тогда a_i — i-тая строка матрицы A, а a^j — j-тый столбец матрицы A.

A' — матрица, транспонированная к A.

$A \geqslant 0$ означает, что все элементы матрицы A неотрицательны.

Через I обозначаем единичную $(n \times n)$-матрицу.

Введем также не столь общепринятое, но весьма для нас удобное обозначение (см. [16]): пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \neq 0$.

Положим $x//y=\max\limits_{\rho y \leqslant x} \rho$. Например, если $x=(0, 1, 2, 0)$, $y=(0, 2, 1, 1)$, то $x//y=0$. Для $x_1=(0, 1, 2, 0)$, $y_1=(0, 2, 1, 0)$: $x_1//y_1={}^1/_2$.

Отметим сразу же три очевидных свойства символа $//$:

а) $\lambda x//\mu y=\lambda\mu^{-1}x//y$ для λ, $\mu>0$;

б) $x//y$, $y \leqslant x$;

в) если $x^n \rightarrow x^0>0$, то $y//x^n \rightarrow y//x^0$.

Часть I

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Математическое введение. Линейное программирование

Рассмотрим следующие задачи:

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{l} \max(c, x), \\ xA \leqslant b, \\ x \geqslant 0. \end{array} \qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{l} \min(b, y), \\ Ay \geqslant c, \\ y \geqslant 0. \end{array}$$

Задачи I и II называются двойственными. Каждая из этих задач называется допустимой, если множество векторов, удовлетворяющих ограничениям этой задачи, не пусто.

Теорема двойственности. Если обе задачи I и II допустимы, то они имеют решения x^* и y^* соответственно; $(c, x^*) = (b, y^*)$, причем если $(x^*A)_i < b_i$, то $y_i^* = 0$ и если $(Ay^*)_j > c_j$, то $x_j^* = 0$. Наоборот, если x^* и y^* удовлетворяют ограничениям задач I и II соответственно и $x_j^* = 0$, как только $(Ay^*)_j > c_j$, $y_i^* = 0$, как только $(x^*A)_i < b_i$, то x^* — решение задачи I, y^* — решение задачи II.

Основными понятиями в теории линейного программирования являются понятия выпуклого множества и выпуклого конуса.

Определение. Подмножество X пространства $\mathbf{R}^n$ называется выпуклым конусом, если вместе с любыми своими точками x, $x' \in X$ оно содержит также любую их неотрицательную линейную комбинацию: $\alpha x + \beta x' \in X$, α, $\beta \geqslant 0$.

Приведем один из многочисленных фактов об отделимости выпуклых множеств, играющих важную роль в линейном программировании.

Лемма В.1. Пусть X — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, имеющий только нулевое пересечение с неположительным ортантом: $X \cap \mathbf{R}^n_- = 0$. Существует вектор $p \in \mathbf{R}^n$ с положительными координатами ($p > 0$), для которого $(p, x) \geqslant 0$ при любом $x \in X$.

Глава 1

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА И ТЕОРИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§ 1. Схема межотраслевого баланса

Основой многих линейных моделей производства является схема межотраслевого баланса. Не останавливаясь на истории возникновения этого метода, отметим, что его идея впервые в явном виде была сформулирована в работах советских экономистов в 20-х годах и получила затем развитие в трудах В. В. Леонтьева по изучению структуры американской экономики (см. [9]).

Схеме межотраслевого баланса и ее различным модификациям посвящена обширная литература. Для обстоятельного знакомства с ней можно рекомендовать книги [10, 11, 12], здесь же изложен упрощенный вариант с сохранением основного математического содержания.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Слова «чистая отрасль» означают, что продукция каждой из этих отраслей предполагается однородной. Чистая отрасль есть некая экономическая абстракция, не обязательно существующая реально в виде каких-то организационных форм типа министерства, треста, объединения. Так, например, под отраслью «электроэнергетика» можно понимать совокупность всех электростанций вне зависимости от их ведомственной принадлежности. Несомненно, что включение в схему межотраслевого баланса только чистых отраслей затрудняет его непосредственное применение, поскольку на практике планирование и отчетность осуществляются в рамках существующих организационных структур. Однако подобная идеализация оправдана тем, что, с одной стороны, она позволяет провести детальный анализ сложившейся технологической структуры общественного производства и распределения, а с другой — тем, что опыт, накопленный при изучении данной упрощенной схемы, привел к построению более содержательных моделей, таких, например, как модель Неймана.

Возвращаясь к описанию схемы межотраслевого баланса, предположим, что каждая отрасль выпускает продукт только одного типа и разные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой нами производственно-экономической системе выпускается n видов продуктов.

В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Допустим теперь, что в некоторый момент времени, скажем, в году T_0, составлен балансовый отчет по народному хозяйству по итоговым данным за фиксированный период времени (например, за прошедший год) по следующей форме:

№ отрасли	1	2	...	n	Валовый выпуск	Конечное потребление
1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	...	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{v}_1$	$\bar{c}_1$
2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	...	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{v}_2$	$\bar{c}_2$
...	...	...	...	...	...	...
n	$\bar{a}_{n1}$	$\bar{a}_{n2}$	...	$\bar{a}_{nn}$	$\bar{v}_n$	$\bar{c}_n$
	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{in}$		

Числа от 1 до n в данной таблице означают номера отраслей. Величина $\bar{a}_{ij}$ показывает объем продукции отрасли с номером j, израсходованной отраслью i в процессе производства за отчетный период. Число $\bar{v}_i$ равно общему объему продукции (валовому выпуску)

i-той отрасли за тот же период, а значение $\bar{c}_i$ показывает объем продукции i-той отрасли, который был потреблен в непроизводственной сфере, для создания запасов и т. д.

Числа $\bar{a}_{ij}$, $i=1, 2, \ldots, n$, показывают распределение продукции отрасли j на производственные нужды других отраслей.

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{v}_j - \bar{c}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Единицы измерения всех указанных величин могут быть либо натуральными (тонны, штуки, квт·ч и т. д.), либо стоимостными, в зависимости от чего различают натуральный и стоимостный межотраслевой баланс. Для определенности мы в дальнейшем будем иметь в виду натуральный баланс.

Если все элементы i-той строки данной таблицы поделить на величину $\bar{v}_i$, то число $a_{ij}=\bar{a}_{ij}/\bar{v}_i$, можно понимать, как объем продукции j-той отрасли, потребный для производства одной единицы продукта отрасли с номером i; число $c_i=\bar{c}_i/\bar{v}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, — как долю продукции i-той отрасли, пошедшую на непроизводственное потребление.

Числа a_{ij}, $j=1, 2, \ldots, n$, в некотором смысле полностью характеризуют технологию i-той отрасли в отчетный период: при данной структуре затрат и их объеме оказался возможным выпуск единицы продукции.

Числа a_{ij}, $j=1, 2, \ldots, n$, носят название коэффициентов прямых затрат отрасли с номером i.

Матрица $A=(a_{ij})$ несет много информации о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства. Сравнивая такие матрицы, составленные в достаточно разнесенные моменты времени, можно проследить направления изменения и развития технологии. Весьма интересные наблюдения и выводы, полученные на этом пути, касающиеся экономики США, можно найти в [13].

Однако еще более интересные возможности открываются в связи с идеей использования матрицы A для текущего и долгосрочного планирования и прогнозирования производства.

Сделаем два важных предположения.

Первое из них состоит в том, что мы будем считать сложившуюся технологию производства неизменной в течение некоторого промежутка времени $[T_0, T]$, где $T>T_0$. В зависимости от постановки задачи промежуток $[T_0, T]$ может быть равен одному календарному периоду (скажем, году) или нескольким.

Второе предположение состоит в постулировании свойства линейности существующей технологии. Именно, будем считать, что для осуществления объема x_i валового выпуска продукции отрасли i необходимо и достаточно произвести затраты в объемах $x_i a_{ij}$, $j=1, 2, \ldots, n$, продукции всех отраслей. Конечно, каждое из этих предположений является очередной идеализацией реального положения вещей. Так, требование линейности означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции, при условии, что ей будет обеспечено сырье в необходимом количестве. На самом деле, конечно, это не так, ибо производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов — станков, производственных площадей и т. д. Позднее этот недостаток описываемой модели будет частично устранен, когда мы будем рассматривать ее динамический вариант.

Будем говорить, что матрица $A=(a_{ij})$ описывает технологию при единичной интенсивности работы всех отраслей.

Допустим, что в промежуток времени $[T_0, T]$ все отрасли будут работать таким образом, что отрасль с номером i произведет объем x_i валового выпуска своей продукции, $i=1, 2, \ldots, n$. Скажем, что i-тая отрасль при этом работает с интенсивностью x_i. Обозначим через x вектор валового выпуска (интенсивностей), $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Воспользовавшись предположением о линейности, нетрудно подсчитать часть общего валового выпуска, пошедшего на производственные нужды в процессе выпуска. Эта часть описывается вектором

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_1, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_n\right).$$

Переходя к матричным обозначениям, имеем, что вектор производственных затрат равен xA. Тогда свободный остаток, равный $c=x-xA$, будет использован на непроизводственные цели.

Основной вопрос, возникающий в планировании производства на период $[T_0, T]$, однако, формулируется, как правило, наоборот: при заданном векторе c конечного потребления требуется определить необходимый вектор x валового выпуска. Другими словами, требуется решить систему уравнений

$$x-xA=c \tag{1.1}$$

при заданном векторе c и матрице A.

Уравнение (1.1) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов x, c называется **моделью Леонтьева.**

§ 2. Линейная модель обмена. Обсуждение математических проблем модели Леонтьева и модели обмена

Здесь мы рассмотрим простую линейную модель обмена, которую мы чисто условно назовем моделью международной торговли. Ее математическая формулировка близка к модели Леонтьева (1.1).

Рассмотрим n стран, торгующих друг с другом. Будем считать, что весь национальный доход π_i страны с номером i складывается от продажи своих товаров либо внутри страны, либо другим странам. Предположим также, что мы имеем дело с уже сложившейся структурой международной торговли, а именно, что доля a_{ij} дохода π_i i-той страны, которая тратится на покупку товаров (импорт) у страны с номером j, постоянна; в частности, она не зависит от величины π_i этого дохода. Эта гипотеза есть не что иное, как вновь предположение о линейности модели, ограничительность которого в данном случае также ясна, поскольку очевидно, что в действительности существует постоянная компонента дохода всякой страны (идущая на самые основные нужды), мало зависящая от общей величины дохода.

Обозначим матрицу, составленную из чисел a_{ij}, описывающих структуру торговли, через A, $A=(a_{ij})$, вектор доходов π_i, $i=1, 2, \ldots, n$, — через π, $\pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots,$

π_n). Тогда, начиная торговать в соответствии с матрицей обмена A, и при наличии доходов всех стран, описываемых вектором π, после одного тура торговли страны будут обладать доходами, величина которых будет описываться вектором πA. В связи с этим можно поставить два вопроса.

Считая, что ни одна страна не желает уменьшения своего дохода, требуется выяснить: согласятся ли они торговать в соответствии с матрицей A при существующем векторе доходов π? Ясно, что при этом необходимо выполнение неравенства

$$\pi \leqslant \pi A. \tag{1.2}$$

Второй вопрос таков. После k туров торговли распределение доходов будет описываться вектором πA^k. Спрашивается: как ведет себя эта последовательность, каково будет предельное распределение доходов?

Отметим, что в линейной модели обмена квадратная $n\times n$ матрица A обладает свойством, которое не присутствовало в матрице Леонтьева из предыдущего параграфа. Именно определение чисел a_{ij}, $j=1, 2, \dots, n$, как долей величины π_i дает равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{1.3}$$

Используя (1.3), нетрудно показать, что если вектор π удовлетворяет неравенству (1.2), то

$$\pi = \pi A. \tag{1.4}$$

В самом деле, векторное неравенство (1.2) эквивалентно системе неравенств

$$\pi_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Допустим, что хотя бы в одном из них имеет место строгое неравенство. Тогда, суммируя, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i.$$

Полученное противоречие и доказывает (1.4). Этот факт, впрочем, очевиден из содержательных соображений: если при описанном обмене кто-то обогащается, то обязательно кто-то другой терпит убытки. Таким образом, первый вопрос, отнесенный к модели обмена, можно переформулировать так: каким должен быть и существует ли вектор π доходов стран — участниц обмена, чтобы выполнялось равенство (1.4)?

Напомним основной вопрос относительно модели Леонтьева (1.1): сможет ли наша технология удовлетворить любой конечный спрос $c \geqslant 0$?

С математической точки зрения вопрос о существовании решения x уравнения (1.1) полностью определяется существованием матрицы $(I-A)^{-1}$, где I — единичная $n \times n$-матрица.

Так же обстоит дело и с уравнением (1.4) — вопрос о существовании решения π эквивалентен наличию у матрицы A собственного числа, равного 1. Отметим, что число 1 является собственным для матрицы обмена A, но доказательство этого факта оставим читателю. Здесь, однако, пора обратить внимание на важное обстоятельство, которое мы до сих пор явно не выделяли: из содержательного смысла моделей вытекает требование неотрицательности решения x уравнения (1.1) и решения π уравнения (1.4).

Окончательная постановка задачи (1.1) такова. Задана квадратная неотрицательная матрица A и неотрицательный вектор конечного спроса c. Существует ли неотрицательный вектор x, удовлетворяющий системе (1.1)?

В том случае, когда неотрицательный вектор интенсивностей x существует для любого вектора c $(c \geqslant 0)$ конечного спроса, будем говорить, что модель Леонтьева, задаваемая технологической матрицей A, продуктивна.

Аналогично формулируется и задача (1.4): существует ли неотрицательный собственный вектор π матрицы A, соответствующий собственному числу 1?

Отсюда становится ясной специфика поставленных задач по сравнению с классическими задачами линейной алгебры — в классических теоремах о собственных векторах и собственных значениях и в теории решения линейных систем уравнений вопрос о положительности ожидаемых решений не играл никакой роли.

§ 3. Теория неотрицательных матриц

Всюду в данном параграфе буквой A обозначается квадратная $n\times n$-матрица с неотрицательными элементами a_{ij}, N — множество, состоящее из первых n натуральных чисел.

Определение. Пусть $S\subseteq N$, $S'=N\setminus S$. Говорят, что множество S изолировано, если в матрице A $a_{ij}=0$, как только $i\in S$, $j\in S'$.

Понятие изолированности подмножества S допускает прозрачную экономическую интерпретацию на языке модели Леонтьева и модели обмена. Так, изолированность множества S в модели Леонтьева означает, что отрасли, номера которых принадлежат множеству S, не нуждаются в товарах, производимых отраслями, номера которых принадлежат множеству S'. Другими словами, часть экономики, образованная отраслями из множества S, может существовать независимо от остальных отраслей.

Для модели международной торговли изолированность множества S означает, что страны с номерами из этого множества не покупают товаров стран из множества S' (хотя, быть может, продают им свои).

Если перенумеровать индексы так, чтобы $S=\{1, 2, ..., k\}$, $S'=\{k+1, ..., n\}$, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A, то матрица A примет вид

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

где A_1 и A_3 — квадратные подматрицы размеров $k\times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответственно.

Определение. Матрица A называется неразложимой, если в множестве N нет изолированных подмножеств, кроме самого N и пустого подмножества.

Иначе говоря, матрица A неразложима, если одинаковой перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду (1.5).

Понятие неразложимости матрицы также имеет интересную экономическую интерпретацию. Так, неразложимость матрицы А в модели Леонтьева означает, что каждая отрасль использует хотя бы косвенно продукцию всех отраслей. Более точно, рассмотрим произвольный элемент a_{ij} матрицы A. Если $a_{ij}>0$, то, следовательно, отрасль i непосредственно использует продукцию отрасли j. Если $a_{ij}=0$, то из неразложимости матрицы A вытекает существование последовательности индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}, i_m$, где $i_1=i$, $i_m=j$ и при этом $a_{i_l i_{l+1}} > 0$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$. Этот факт означает, что отрасль $i(=i_1)$ использует продукцию отрасли i_2, отрасль i_2 использует продукцию отрасли i_3 и т. д., так что косвенным образом отрасль i все-таки использует в процессе производства продукцию отрасли j. Упомянутое утверждение относительно существования последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_m$ нетрудно доказать непосредственно, однако мы этого делать не будем — оно фигурирует ниже в качестве свойства f.

Отметим несколько простых свойств неразложимых матриц.

a. Неразложимая матрица не имеет нулевых строк и столбцов. В самом деле, если i-тая строка матрицы A нулевая, то множество $S=\{i\}$ изолировано. Если j-тый столбец нулевой, то множество $S=N\setminus\{j\}$ изолировано.

b. Если матрица A неразложима и $y>0$, то $Ay>0$. Очевидно, поскольку в матрице A нет нулевых строк.

Лемма 1.1. Пусть A — неразложимая матрица; $y\geqslant 0$, $z=Ay$, $S=\{i\,|\,y_i=0\}$, $T=\{i\,|\,z_i>0\}$. Если $S\neq\varnothing$, N, то $S\cap T\neq\varnothing$.

Доказательство. Обозначим $S'=N\setminus S$, $T'=N\setminus T$. Если предположить, что $S\cap T=\varnothing$, то $S\subseteq T'$, $T\subseteq S'$. Покажем, что S — изолированное подмножество. Пусть $i\in S$. В таком случае $i\in T'$ и поэтому

$$0=z_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = \sum_{j\in S'} a_{ij}y_j.$$

Поскольку для всякого $j\in S'$, $y_j>0$, то имеем $a_{ij}=0$ при всех $j\in S'$. Лемма доказана.

с. Следствие. Пусть $y\geqslant 0$, $y\neq 0$, тогда вектор $z=y+Ay$ имеет меньше нулевых координат, чем вектор y, если это возможно.

d. Если A — неразложимая матрица, то $(I+A)^{n-1}>0$. Действительно, из свойства c вытекает, что для любого $y\geqslant 0$, $y\neq 0$, $(I+A)^{n-1}y>0$, откуда уже нетрудно получить свойство d.

Для любого натурального числа m будем обозначать элемент, стоящий на месте (i, j) в матрице A^m, символом $a_{ij}^{(m)}$.

e. Если A — неразложима, то для любой пары индексов (i, j) $i, j=1, 2, ..., n$ найдется такое натуральное число m, что $a_{ij}^{(m)} > 0$.

В самом деле, если $i \neq j$, то среди элементов $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}, \ldots, a_{ij}^{(n-1)}$ должно найтись положительное число, ибо в противном случае, как следует из разложения

$$(I+A)^{n-1} = I + C_{n-1}^{1}A + C_{n-1}^{2}A^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}A^{n-1},$$

на месте (i, j) в матрице $(I+A)^{n-1}$ будет стоять ноль, что противоречит свойству *d*. Если $i=j$, рассмотрим матрицу $A(I+A)^{n-1}$. Из свойств *b* и *c* вытекает, что она положительна, и, вновь воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получаем, что среди чисел $a_{ii}^{(1)}, a_{ii}^{(2)}, \ldots, a_{ii}^{(n)}$ найдется положительное.

f. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда для любых индексов i, j найдется последовательность $i_1, i_2, ..., i_m$, $1 \leqslant i_l \leqslant n$, $l=1, 2, ..., m$, такая, что $i_1=i$, $i_m=j$, $a_{i_l i_{l+1}} > 0$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$.

Действительно, по свойству *e* для неразложимой матрицы А и пары индексов i, j найдется такое натуральное число m, что $a_{ij}^{(m)} > 0$. Привлекая правило умножения матриц, имеем

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{(i_2,\ldots,i_{m-1})} a_{ii_2}a_{i_2i_3}\ldots a_{i_{m-1}j} > 0,$$

где суммирование берется по всем наборам $(i_2, ..., i_{m-1})$, $1 \leqslant i_l \leqslant n$, $l=2, ..., m-1$. Поскольку все слагаемые под знаком суммы неотрицательны, а величина суммы больше нуля, то по крайней мере одно из слагаемых положительно, что и доказывает первую часть утверждения *f*.

Доказательство обратного утверждения оставляем читателю.

g. Пусть A — неразложимая матрица, m — натуральное число. Тогда в матрице A^m нет нулевых строк и столбцов.

Докажем утверждение относительно строк. Пусть строка с номером i в матрице A^m состоит из нулей:

$$0 = a_{ij}^{(m)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}^{(m-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.6)$$

По свойству a в матрице A строка с номером i — не нулевая, т. е. найдется l_0, что $a_{il_0} > 0$. Тогда из (1.6) вытекает, что $a_{l_0 j}^{(m-1)} = 0$, $j=1, 2, \ldots, n$, т. е. строка с номером l_0 в матрице A^{m-1} состоит из нулей. Используя теперь очевидную индукцию, получаем требуемое утверждение.

Перейдем к изучению более глубоких свойств неотрицательных матриц. Имеются в виду две теоремы: теорема Фробениуса — Перрона о спектральных свойствах таких матриц и теорема об эргодическом свойстве последовательности A^k, $k=1, 2, \ldots$.

Теорема 1.1. (Фробениус — Перрон).

А. Неразложимая матрица $A \geqslant 0$ имеет положительное собственное число λ_A, причем модули остальных собственных чисел матрицы A, как действительных, так и комплексных, не превосходят λ_A.

Б. Числу λ_A отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор x_A, все координаты которого ненулевые и одного знака (т. е. его можно выбрать положительным).

Доказательство. Пусть M — множество всех неотрицательных векторов, сумма координат которых равна 1:

$$M = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

Ясно, что M — компакт. Рассмотрим на M функцию $\rho(x) = Ax//x$. (Напомним, что символ $y//x$ определяется следующим образом: $y//x = \max\limits_{\rho x \leqslant y} \rho$.) Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что полунепрерывная сверху функция на компакте достигает точной верхней грани. Покажем, что $\rho(x)$ полунепрерывна сверху на M. Согласно определению полунепрерывности сверху требуется лишь проверить, что для любой сходящейся последовательности $x_k \in M$, $k=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, выполняется неравенство $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \rho(x_k) \leqslant \rho(x_0)$. Пусть подпоследовательность $\rho(x_{k_s})$ сходится к $\bar{\rho}: \lim\limits_{s\to\infty} \rho(x_{k_s}) = \bar{\rho}$.

Тогда по определению функции $\rho(x)$ имеем

$$\rho(x_{k_s})\, x_{k_s} \leqslant A x_{k_s}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, получаем $\bar{\rho} x_0 \leqslant A x_0$. Вновь пользуясь определением функции $\rho(x)$, заключаем $\bar{\rho} \leqslant \rho(x_0)$, что и доказывает полунепрерывность сверху $\rho(x)$. Пусть $\max\limits_{x\in M} \rho(x) = \rho(x_A) = \lambda_A$. Тот факт, что $\lambda_A > 0$, можно установить, вычислив значение функции ρ в точке $e = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in M$:

$$\rho(e) = Ae/\!/e = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0.$$

Здесь использовано то, что в неразложимой матрице нет нулевых строк (свойство a).

Отметим, что функция $\rho(x)$ является положительно однородной нулевой степени, т. е. для любого $\alpha > 0$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$ $\rho(\alpha x) = \rho(x)$. Из этого вытекает, в частности, что λ_A является максимумом функции ρ на всем неотрицательном ортанте $\mathbf{R}_{+}^{n}$, исключая 0.

Покажем, что $\rho(x_A) = \lambda_A$ является собственным числом матрицы A и что любой вектор x, для которого $\rho(x) = \lambda_A$ является собственным, отвечающим этому собственному числу, и строго положительным.

Пусть $\rho(x) = \lambda_A$. По определению функции ρ, $\lambda_A x \leqslant \leqslant Ax$. Допустим, что хотя бы в одной координате имеет место строгое неравенство. Тогда вектор $y = Ax - \lambda_A x$ неотрицателен и не равен нулю. По свойству d $(I+A)^{n-1} y > 0$. Однако

$$(I + A)^{n-1} y = (I + A)^{n-1} (A - \lambda_A I)\, x = (A - \lambda_A I)\, z > 0,$$

где $z = (I+A)^{n-1} x$. Здесь мы воспользовались перестановочностью многочленов от матрицы A. Отсюда получаем $\lambda_A z < Az$. Из этого неравенства вытекает, что $\rho(z) > \lambda_A$, а это противоречит определению λ_A как максимума функции ρ.

Итак, если $\rho(x)=\lambda_A$, то $\lambda_A x=Ax$. Поскольку $(I+A)^{n-1}x=(1+\lambda_A)^{n-1}x$, то отсюда вытекает, что $x>0$.

Покажем теперь, что геометрическая кратность собственного числа λ_A равна 1, т. е. что ему соответствует только один собственный луч. Пусть $Ay=\lambda_A y$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Воспользовавшись обозначением $|y|=(|y_1|, \ldots, |y_n|)$, и тем фактом, что модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей, получаем $\lambda_A|y|\leqslant A|y|$. Отсюда $\rho(|y|)=\lambda_A$, и по доказанному имеем $\lambda_A|y|=A|y|$ и $|y|>0$. Следовательно, любой собственный вектор y, отвечающий числу λ_A, не имеет нулевых компонент. Отсюда вытекает, что не существует двух линейно-независимых собственных векторов, соответствующих числу λ_A, так как из них можно было бы устроить линейную комбинацию так, что у получившегося нового собственного вектора была бы нулевая компонента.

Пусть λ — произвольное собственное число (может быть, комплексное) матрицы A, $Ay=\lambda y$. Из неравенства $|\lambda|\,|y|\leqslant A|y|$ имеем $|\lambda|\leqslant\rho(|y|)\leqslant\lambda_A$, что и заканчивает доказательство теоремы.

Положительный собственный вектор x_A и собственное число λ_A неразложимой матрицы A будем называть правым вектором и числом Фробениуса соответственно.

Поскольку матрица A' неотрицательна и неразложима вместе с матрицей A, то она также обладает положительным собственным вектором $y_A: y_A A=\lambda_A y_A, y_A>0$. Вектор y_A будем называть левым вектором Фробениуса матрицы A.

Как мы увидим в дальнейшем, понятие фробениусова числа и вектора матрицы A играет важнейшую роль при исследовании свойств модели Леонтьева как в статическом варианте (1.1), так и в динамике этой модели.

При изучении динамического аналога модели Леонтьева нам также потребуется знать поведение последовательности A^k степеней матрицы A.

Сопоставим всякой неразложимой матрице A матрицу $\bar{A}=1/\lambda_A A$. Ясно, что матрица $\bar{A}$ также будет неразложимой, $\lambda_{\bar{A}}=1$ и векторы Фробениуса матрицы $\bar{A}$ совпадают с x_A, y_A.

Поскольку вектор $y_A>0$, то в пространстве $\mathbf{R}^n$ можно ввести норму по формуле $\|x\|_A=(|x|, y_A)$. Эта норма очень удобна при изучении свойств матрицы A как линейного оператора. Например, для любого $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $\|Ax\|_A \leqslant \lambda_A \|x\|_A$, в частности

$$\|\bar{A}x\|_A \leqslant \|x\|_A. \tag{1.7}$$

В оставшейся части данной главы мы будем постоянно пользоваться этой нормой, выбрав при этом вектор y_A так, что $\|y_A\|_A = 1$. Для сокращения записи значок матрицы A около символа нормы будем опускать.

Определение. Неразложимую матрицу A будем называть устойчивой, если для любого вектора x, последовательность $\bar{A}^k x$, $k=1, 2, \ldots$, сходится.

Отметим сразу, что если последовательность $\bar{A}^k x$ сходится при $x \geqslant 0$, $x \neq 0$ и $k \to \infty$, то ее предел равен μx_A, где $\mu = \|x\|/\|x_A\|$. В самом деле, пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k x = z$.

Тогда $\bar{A}z = z$ и вектор $z \geqslant 0$ либо нулевой, либо $z = \mu x_A$ для некоторого μ. Поскольку $\|\bar{A}^k x\| = \|x\|$, то $\|z\| = \|x\|$, откуда и вычисляется число $\mu > 0$.

Пример матрицы, не являющейся устойчивой: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для любого вектора $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \neq x_2$, последовательность $\bar{A}^k x$ не сходится.

Этот пример можно усложнить. Обратимся к нашей модели международной торговли. Пусть множество всех стран разбито на m непересекающихся подмножеств S_0, S_1, ..., S_{m-1} и страны из группы S_r покупают товары только у стран из группы S_{r+1}, $r=0, 1, \ldots, m-2$, а страны S_{m-1} покупают только у членов группы S_0. Если начальный вектор распределения доходов имеет вид $y = (y_1, 0, \ldots, 0)$, то доход y_1 в результате торговли будет переходить от одной группы стран к другой и затем вернется к S_1. Оказывается, только такой случай неустойчивости и может иметь место.

Определение. Неразложимая матрица $A \geqslant 0$ называется импримитивной (или циклической), если множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ можно так разбить на m непересекающихся подмножеств $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$, что если $a_{ij} > 0$, $i \in S_r$, $r \geqslant 1$, то $j \in S_{r-1}$, а при $i \in S_0$, $j \in S_{m-1}$. Число m называется индексом импримитивности матрицы A.

После очевидной перенумеровки индексов, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов матрицы, импримитивную матрицу можно привести к следующему виду:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 & A_{m-1} \\ A_0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots A_{m-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Остальные неразложимые матрицы $A \geqslant 0$ называются примитивными.

Теорема 1.2. Примитивная матрица устойчива.

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов.

Определение. Пусть $\mathscr{L}$ — произвольное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, инвариантное относительно оператора $\bar{A}$. Скажем, что оператор $\bar{A}$ является на $\mathscr{L}$ оператором сжатия, если существует такое число γ, $0 \leqslant \gamma < 1$, что для всех $z \in \mathscr{L}$ имеет место неравенство $\|\bar{A}z\| \leqslant \leqslant \gamma\|z\|$.

Рассмотрим в качестве $\mathscr{L}$ ортогональное дополнение к вектору y_A: $\mathscr{L}_A = \{z \mid (z, y_A) = 0\}$. Очевидно, что подпространство $\mathscr{L}_A$ инвариантно относительно оператора $\bar{A}$.

Лемма 1.2. Если оператор $\bar{A}$ действует как оператор сжатия на подпространстве $\mathscr{L}_A$, то матрица A устойчива.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$. Представим вектор x в виде $x = \mu x_A + z$, где $z \in \mathscr{L}_A$. Для этого достаточно положить $\mu = (x, y_A)/(x_A, y_A)$. Тогда

$$\|\bar{A}^k x - \mu x_A\| = \|\bar{A}^k (x - \mu x_A)\| = \|\bar{A}^k z\| \leqslant \leqslant \gamma^k \|z\| = \gamma^k \|x - \mu x_A\|.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|\bar{A}^k x - \mu x_A\| = 0$, после чего остается воспользоваться тем, что сходимость по норме и координатная сходимость эквивалентны, откуда и получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k x = \mu x_A$.

Лемма 1.3. Если неразложимая матрица A имеет положительную строку, то оператор $\bar{A}$ является на $\mathscr{L}_A$ оператором сжатия.

Доказательство. В условиях леммы матрица $\bar{A}$ обладает положительной строкой. Пусть первая строка $\bar{a}_1$ матрицы $\bar{A}$ положительна. Положим $\delta = \bar{a}_1 // y_A = \max\limits_{\lambda y_A \leqslant \bar{a}_1} \lambda$. Ясно, что $\delta > 0$. Пусть y_A^1 — первая координата вектора y_A. Тогда $\delta y_A^1 > 0$. Покажем, что $\delta y_A^1 \leqslant 1$. Допустим, что $\delta y_A^1 > 1$. В таком случае

$$\delta y_A^1 = \delta \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i1} y_A^i \geqslant \delta a_{11} y_A^1 > a_{11},$$

что противоречит определению δ. Таким образом, $0 < \delta y_A^1 \leqslant 1$. Обозначим $\gamma = 1 - \delta y_A^1$, $0 \leqslant \gamma < 1$. Покажем, что γ — коэффициент сжатия оператора A на подпространстве $\mathscr{L}_A$. В самом деле, пусть $z \in \mathscr{L}_A$. Будем считать, что $(\bar{a}_1, z) > 0$, в противном случае мы рассмотрели бы вектор $-z \in \mathscr{L}_A$. Тогда

$$\|Az\| = \sum_{i=1}^{n} y_A^i |(\bar{a}_i, z)| = y_A^1 (\bar{a}_1, z) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} y_A^i |(\bar{a}_i, z)| \leqslant y_A^1 (\bar{a}_1, z) + \sum_{i=2}^{n} y_A^i (\bar{a}_i, |z|) =$$

$$= y_A^1 (\bar{a}_1, z) - y_A^1 (\bar{a}_1, |z|) + \sum_{i=1}^{n} y_A^i (\bar{a}_i, |z|) =$$

$$= y_A^1 (\bar{a}_1, z - |z|) + (y_A, \bar{A}|z|) \leqslant$$

$$\leqslant y_A^1 (\delta y_A, z - |z|) + (y_A, |z|) = \gamma \|z\|.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $z - |z| \leqslant 0$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. Если матрица A^k устойчива при некотором натуральном k, то матрица A также устойчива.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ и $\lim\limits_{s \to \infty} (\bar{A}^k)^s x = \mu x_A$. Покажем, что $\lim\limits_{m \to \infty} \bar{A}^m x = \mu x_A$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, тогда существует такое число S, что при $s \geqslant S$ выполняется неравенство $\|\bar{A}^{sk} x - \mu x_A\| < \varepsilon$.

Ёсли теперь $M = \hat{S}k$, то при $m \geqslant M$, $m = sk + r$, где $s \geqslant \hat{S}$, $0 \leqslant r < k$. Тогда

$$\|\bar{A}^m x - \mu x_A\| = \|\bar{A}^r \bar{A}^{sk}(x - \mu x_A)\| \leqslant \|\bar{A}^{sk}(x - \mu x_A)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1.2. нам достаточно показать, что либо матрица A^k при некотором k обладает положительной строкой, либо матрица A — циклическая.

Рассмотрим множество $R = \{r \mid a_{11}^{(r)} > 0\}$. Свойство e неразложимых матриц утверждает, что множество R не пусто. Пусть p — наибольший общий делитель чисел из R. Возможны два случая: $p > 1$, $p = 1$. Мы покажем, что в первом случае матрица A — циклическая, во втором случае — устойчива.

I. $p > 1$. Разобьем множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ на классы $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ по следующему правилу: $j \in S_r$, если существует номер k такой, что $k \equiv (p - r) \bmod p$, и $a_{1j}^{(k)} > 0$. Покажем, что классы S_r, $r = 0, 1, \ldots, p - 1$ не пересекаются. Пусть $a_{1j}^{(l)} > 0$. Пользуясь свойством e, найдем номер m, что $a_{j1}^{(m)} > 0$. Тогда $a_{11}^{(k+m)} > 0$ и $a_{11}^{(l+m)} > 0$. По определению множества R и числа p это означает, что $k + m$ и $l + m$ делятся на p. Следовательно, $l \equiv k (\bmod\, p)$.

Ясно, что ни один из классов S_r не пуст. Действительно, если класс S_r пуст, то в матрице A^{p-r} первая строка — нулевая, что, как мы знаем по свойству g, невозможно.

Покажем, что выбранное нами разбиение есть как раз циклическое разложение матрицы A (см. определение). Пусть $a_{ij} > 0$, $i \in S_r$, $r > 0$, далее, пусть номер k таков, что $a_{1i}^{(k)} > 0$. Тогда, по определению S_r, $k \equiv (p - r) \bmod p$. Поскольку $a_{1j}^{(k+1)} \geqslant a_{1i}^{(k)} a_{ij}$ и $k + 1 \equiv (p - (r - 1)) \bmod p$, то $j \in S_{r-1}$. Если $r = 0$, то легко видеть, что $j \in S_{p-1}$.

II. $p = 1$. Рассмотрим числа $l_1, l_2, \ldots, l_m$ из R, наибольший общий делитель которых равен 1.

Лемма 1.5. Если наибольший общий делитель множества $\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ натуральных чисел равен 1, то существует такое число Q, что всякое натуральное число $l \geqslant Q$ представимо в виде $l = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i$, где α_i — натуральные числа.

Доказательство. Поскольку числа l_i, $i=1, 2, \ldots, m$, взаимно просты, то существуют такие целые числа β_i, $i=1, 2, \ldots, m$, что $1 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i l_i$. Тогда в качестве Q можно взять число $Q=d^2$, где $d = \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| l_i$. В самом деле, пусть $l \geqslant Q$, тогда $l=sd+q$, где $s \geqslant d$, $q<d$. Следовательно,

$$l = sd + q = s\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| l_i + q\sum_{i=1}^{m} \beta_i l_i = \sum_{i=1}^{m} (s|\beta_i| + q\beta_i) l_i.$$

Числа $s|\beta_i|+q\beta_i \geqslant q(|\beta_i|+\beta_i) \geqslant 0$, так как $s>q$.

Лемма 1.5 позволяет нам закончить доказательство теоремы 1.2. Покажем, что в случае $p=1$ некоторая степень матрицы A имеет положительную строку.

В самом деле, нетрудно видеть, что при любом натуральном l, $l \geqslant Q$, где Q — число, существование которого устанавливается в лемме 1.5, в матрице A^l элемент $a_{11}^{(l)} > 0$. Действительно, пусть $l = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i$, $l_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $A^l = (A^{l_1})^{\alpha_1} \ldots (A^{l_m})^{\alpha_m}$. Однако в матрице A^{l_i}, $a_{11}^{(l_i)} > 0$, по определению множества R. Поэтому элемент $a_{11}^{(\alpha_i l_i)}$ также больше нуля, $i=1, 2, \ldots, m$. Отсюда уже непосредственно вытекает, что $a_{11}^{(l)} > 0$.

Пусть теперь натуральное число t_j таково, что $a_{1j}^{(t_j)} > 0$ (свойство e), $t = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} t_j$. Тогда матрица A^{Q+t} обладает положительной первой строкой. Убедиться в этом можно следующим образом. Для произвольного номера j $1 \leqslant j \leqslant n$, $t=t_j+\varepsilon_j$, $\varepsilon_j \geqslant 0$ — натуральное число. Тогда $A^{Q+t} = A^{Q+\varepsilon_j} A^{t_j}$. Поскольку $a_{11}^{(Q+\varepsilon_j)} > 0$, $a_{1j}^{(t_j)} > 0$, то $a_{1j}^{(Q+t)} > 0$, что и требовалось доказать. Теорема 1.2 полностью доказана.

Понятие устойчивости матрицы A, т. е. исследование поведения последовательности $\bar{A}^k x$ при любом $x \in \mathbf{R}^n$, эквивалентно изучению матричной последовательности $\bar{A}^k$, $k=1, 2, \ldots$. Этот факт отражает

Лемма 1.6. Для того чтобы матрица A была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k = \bar{B}$.

Доказательство достаточности очевидно, поскольку если $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k = \bar{B}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k y = \bar{B} y$. Наоборот, если матрица A устойчива, то существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k e_j$, где $e_j = (0, 0, \ldots, 1_j, 0, \ldots, 0)$. Поскольку $\bar{A}^k e_j = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1j}^{(k)} \\ \vdots \\ \bar{a}_{nj}^{(k)} \end{pmatrix}$, то отсюда вытекает и сходимость матричной последовательности $\bar{A}^k$, $k=1, 2, \ldots$.

Обе фундаментальные теоремы 1.1. и 1.2 относятся к неразложимым неотрицательным матрицам.

Покажем, что изучение разложимых матриц полностью сводится к этому случаю.

Как мы знаем, матрица A разложима тогда и только тогда, когда при надлежащей одновременной перестановке строк и столбцов она принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_3 — квадратные матрицы. Матрицы A_1 и A_3 также могут быть разложимыми. С целью изучить подробнее вид, к которому можно привести разложимую матрицу подобным процессом, введем следующее понятие.

Определение. Изолированное подмножество S множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется неприводимым, если оно не содержит других изолированных подмножеств.

Заметим, что изолированность подмножества $T \subseteq S$ относительно подматрицы, соответствующей данному изолированному множеству S, эквивалентна изолированности относительно A.

Лемма 1.7. Пересечение и объединение изолированных подмножеств являются изолированными подмножествами.

Доказательство предоставляется читателю.

Следствие. Пересечение несовпадающих неприводимых подмножеств пусто.

Определение. Назовем неприводимым разложением множества N разложение вида

$$N = \left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i\right) \cup T_0, \tag{1.8}$$

где T_i, $i=1, 2, \ldots, m$ — различные неприводимые изолированные подмножества, а множество T_0 не содержит изолированных подмножеств.

Существование хотя бы одного такого разложения сомнений не вызывает. Покажем его единственность. Пусть $N = \left(\bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{T}_i\right) \cup \widetilde{T}_0$ — другое неприводимое разложение. Мы хотим доказать, что $s=m$, $T_0=\widetilde{T}_0$ и $\widetilde{T}_i=T_j$ для некоторого j; $i=1, 2, \ldots, s$. В самом деле, пусть $\widetilde{T}_1 \neq T_j$, $j=1, 2, \ldots, m$. Тогда, как видно из следствия к лемме 1.7, произвольный номер $l \in \widetilde{T}_1$ не может принадлежать никакому T_j, $j=1, 2, \ldots, m$. Поэтому $\widetilde{T}_1 \subset T_0$, что также невозможно по определению T_0. Докончить доказательство предоставляем читателю.

Если перенумеровать индексы так, чтобы множество T_1 состояло из первых нескольких натуральных чисел, T_2 — из следующих и т. д., то матрица A примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & A_m & 0 \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_m & B_{m+1} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

При этом матрицы A_i, $i=1, 2, \ldots, m$ — квадратные и неразложимы.

Таким образом, произвольную неотрицательную матрицу А одновременной перестановкой строк и столбцов можно привести к виду (1.9).

Определение. Если в неприводимом разложении (1.8) множества N компонента T_0 есть пустое множество, то матрица A называется вполне приводимой.

При надлежащей одновременной перестановке строк и столбцов вполне приводимая матрица A выглядит следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

где A_i — квадратные неразложимые матрицы.

Теорема Фробениуса — Перрона для произвольных неотрицательных матриц формулируется так:

Теорема 1.3.

А. Неотрицательная матрица $A \geqslant 0$ имеет неотрицательное собственное число $\lambda_A \geqslant 0$, причем модули всех остальных чисел матрицы A не превосходят λ_A.

Б. Существует неотрицательный собственный вектор, соответствующий значению λ_A.

Докажем эту теорему индукцией по порядку матрицы A. Для матриц первого порядка утверждение тривиально. Пусть матрица представлена в форме (1.9). Тогда все собственные числа матрицы A суть собственные числа матриц A_1, ..., A_m, B_{m+1}. Большее из этих чисел $\lambda_{A_1}, \dots, \lambda_{A_m}, \lambda_{B_{m+1}}$ назовем λ_A. Остальное нетрудно.

Следующая теорема позволяет делать некоторые заключения о величине фробениусова корня λ_A матрицы A.

Пусть $A \geqslant 0$, r_i — сумма элементов i-той строки матрицы A, s_j — сумма элементов j-того столбца;

$$r = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i, \quad R = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i, \quad s = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j, \quad S = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j.$$

Теорема 1.4. Для произвольной матрицы $A \geqslant 0$

$$r \leqslant \lambda_A \leqslant R,$$

$$s \leqslant \lambda_A \leqslant S.$$

Если матрица A неразложима, то все неравенства строгие, за исключением случая, когда $r = R$ и $s = S$.

Доказательство. Возьмем вектор x_A, сумма компонент которого равна 1. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_A^j = \lambda_A x_A^i$.

Суммируя эти равенства по i, получаем

$$\lambda_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_A^j = \sum_{j=1}^{n} x_A^j s_j,$$

отсюда имеем неравенство $s \leqslant \lambda_A \leqslant S$. Далее, если матрица A неразложима, то все компоненты вектора x_A больше 0 и если при этом $s < S$, то $s < \lambda_A < S$.

Аналогично доказывается утверждение относительно строчных сумм.

Если матрица A (а значит, и $\bar{A}$) вполне приводима, то обозначим через x_{Ai}, y_{Ai} n-мерные векторы, ненулевые координаты которых образуют соответственно правый и левый фробениусов векторы матрицы A_i, $i=1, 2, \ldots, m$. Нетрудно показать, что для любого $x \in \mathbf{R}^n$

$$\lim_{k \to \infty} \bar{A}^k x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_{A_i},$$

где $\mu_i = (x, y_{A_i})/(x_{A_i}, y_{A_i})$.

§ 4. Анализ продуктивности модели Леонтьева

Теперь мы в состоянии дать ответы на вопросы, поставленные в § 2 и касающиеся модели Леонтьева и модели международной торговли.

В математическом плане факт продуктивности модели Леонтьева полностью определяется величиной фробениусова собственного числа λ_A матрицы A коэффициентов прямых затрат.

Теорема 1.5. Модель Леонтьева (1.1) продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$.

Доказательство. Поскольку все собственные числа матрицы A по модулю меньше 1, то 1) $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$, 2) матрица $(I-A)$ невырождена. Оба эти факта легко установить, рассмотрев комплексную жорданову форму матрицы A. Нетрудно вывести формулу суммы геометрической прогрессии

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \qquad (1.11)$$

Поскольку $A^k \geqslant 0$, $k=1, 2, \ldots$ то матрица $(I-A)^{-1} \geqslant 0$, из чего непосредственно вытекает, что для любого вектора конечного спроса $c \geqslant 0$ существует неотрицательное решение системы уравнений (1.1)

$$x = c(I-A)^{-1} \geqslant 0, \tag{1.12}$$

что и означает продуктивность модели Леонтьева.

Обратно, пусть модель Леонтьева продуктивна. Возьмем в качестве вектора конечного спроса c в уравнении (1.1) произвольный положительный вектор $c>0$. По предположению о продуктивности, существует вектор $x \geqslant 0$ такой, что $x - xA = c$, т. е. $x > xA$. Умножая последнее неравенство скалярно на y_A, имеем $(x, y_A) > \lambda_A (x, y_A)$. Поскольку $(x, y_A) > 0$, окончательно получаем $\lambda_A < 1$. Теорема доказана.

Теорема 1.5 дает возможность проверять модель Леонтьева на продуктивность, однако ее формулировка абстрактна и далека от экономических интерпретаций. Сформулируем экономически осмысленное условие продуктивности модели.

Если некоторый положительный конечный спрос $c>0$ может быть удовлетворен в модели Леонтьева (1.1), то модель продуктивна.

Доказательство этого утверждения состоит в последовательном повторении сначала второй части доказательства предыдущей теоремы, а затем первой.

Таким образом, если модель Леонтьева продуктивна, то вектор x валового выпуска, который необходим для удовлетворения конечного спроса c, определяется формулой (1.12). Данная формула имеет весьма важную экономическую интерпретацию. Рассмотрим ее другую запись

$$x = c + cA + cA^2 + cA^3 + \ldots, \tag{1.13}$$

которую можно толковать следующим образом. Для того чтобы получить требуемый вектор конечного спроса $c \geqslant 0$, необходимо произвести все количества продуктов, являющиеся компонентами данного вектора, но этого мало — в процессе производства возникают дополнительные затраты (косвенные), описываемые вектором cA. Следовательно, валовый выпуск будет включать в себя и вектор cA. Далее, при производстве вектора cA

вновь возникают дополнительные затраты, равные $cA \cdot A = cA^2$ и т. д. В соответствии с этим ряд $c + cA + cA^2 + \ldots = c(I - A)^{-1}$ называют полными затратами на производство конечного спроса c, а матрицу $(I - A)^{-1} = A^*$ — матрицей полных затрат. Формулу (1.12) можно понимать таким образом: валовый выпуск, необходимый для выпуска вектора конечного спроса c, равен вектору c, умноженному на матрицу полных затрат.

Обратимся к модели международной торговли. Поскольку в этой модели сумма элементов каждой строки равна 1, то согласно теореме 1.4 $\lambda_A = 1$. Если страны начинают торговать между собой, имея распределение доходов, задаваемое одним из векторов y_A, то в результате торговли доходы стран меняться не будут.

Пусть матрица A неразложима и примитивна и страны начинают торговать между собой с начальным распределением доходов π^0. Тогда, как показывает теорема 1.2, распределение доходов будет стремится к вектору y_A такому, что $(y_A, x_A) = (\pi^0, x_A)$..

Теорема 1.2, описывающая эргодические свойства неотрицательных положительных матриц, играет существенную роль при изучении динамических моделей леонтьевского типа, что мы увидим в следующей главе.

В заключение еще раз вернемся к обсуждению экономического содержания схемы межотраслевого баланса и модели Леонтьева.

Общепринятая схема межотраслевого баланса гораздо богаче упрощенного варианта, изложенного в § 1. Основное отличие состоит в подробном раскрытии составляющих вектора конечного спроса, таких, как валовые накопления, включающие капитальные вложения, прирост запасов и т. д.; личное потребление; весь непроизводственный сектор, состоящий из здравоохранения, науки, культуры и т. д. Информация, содержащаяся в подробной таблице межотраслевого баланса, полностью раскрывает не только межотраслевые связи народного хозяйства, но и структуру распределения и перераспределения национального продукта.

Мы сосредоточили внимание на так называемом первом квадранте схемы межотраслевого баланса, который является наиболее важным с точки зрения построения экономико-математических моделей производства.

По поводу модели Леонтьева заметим еще раз, что она отражает лишь потенциальные возможности, заложенные в технологии производственного сектора. В модели (1.1) предполагается, что процесс производства совершается мгновенно — все промежуточные продукты оказываются произведенными к тому моменту, когда в них появляется потребность. Формально, конечно, можно построить модель типа (1.1), в которой будут различаться однотипные продукты, произведенные в разные моменты времени, однако, статистическую информацию для такой модели межотраслевой баланс уже дать не в состоянии.

Подобные проблемы решаются с помощью построения динамических моделей леонтьевского типа, или, как их называют, моделей динамического межотраслевого баланса. Для учёта временного лага (запаздывания) в процессе производства, который особенно велик для таких отраслей, как строительство, матрицу A разбивают на блоки, выделяя, например, коэффициенты затрат на капитальное строительство. Подробнее с этим можно познакомиться в рекомендованной выше литературе. Однако, как обычно, более подробная модель хуже поддается теоретическому исследованию, поэтому в дальнейшем мы будем придерживаться основной схемы модели Леонтьева с тем, чтобы отчетливо показать идеи, лежащие в основе изучения большого класса моделей производства.

§ 5. Коэффициенты трудовых затрат в модели Леонтьева

Вопросы использования и распределения трудовых ресурсов являются чрезвычайно важными, поскольку их решение во многом определяет эффективность общественного производства. Исследование некоторых проблем, связанных с данным кругом вопросов, возможно с помощью модели Леонтьева.

Сопоставим каждой i-той отрасли число $l_i>0$, выражающее потребные затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности данного технологического процесса (отрасли). В зависимости от цели моделирования числа l_i, $i=1, 2, \ldots, n$, могут измеряться либо в человеко-днях (человеко-часах), либо просто числом работающих. Если обозначить вектор затрат трудовых ресурсов через l, $l=(l_1, l_2, \dots, l_n)$, то технологию такой модифицированной модели Леонтьева можно представить парой (l, A).

При рассмотрении статического варианта модели Леонтьева, не учитывающего предысторию процесса производства, в частности ограниченности материальных ресурсов, естественно предположить, что единственным ограничивающим фактором производства является общий объем трудовых ресурсов. Обозначим общий объем трудовых ресурсов через $L>0$.

Если режим работы экономической системы, описываемой моделью Леонтьева, задается вектором интенсивностей x, то в новой ситуации уже не любой вектор интенсивностей x, $x \geqslant 0$ (напомним, что он же является и вектором валового выпуска) будет допустимым. В самом деле, объем затрат трудовых ресурсов при работе в соответствии с вектором интенсивностей x равен (x, l). Поэтому допустимым является любой неотрицательный вектор x, удовлетворяющий неравенству $(x, l) \leqslant L$. Таким образом, уже нельзя ставить вопрос об удовлетворении любого конечного спроса $c \geqslant 0$: решение системы

$$
\begin{aligned}
x - xA &= c, \qquad (1.14)\\
(x, l) &\leqslant L,
\end{aligned}
$$

существует, конечно, не при любом неотрицательном векторе c.

В связи с этим сформулируем следующую экстремальную задачу.

Пусть вектор $c \geqslant 0$ задает не конечный спрос, а лишь структуру конечного спроса. Можно, например, считать, что $\|c\|=1$. Рассмотрим задачу составления оптимального плана

$$
\begin{aligned}
&\max \alpha\\
&x - xA \geqslant \alpha c, \qquad (1.15)\\
&(x, l) \leqslant L, \qquad (1.16)\\
&x \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

которую можно интерпретировать как стремление максимизировать количество выпущенных «комплексов» c. Содержанием задачи (1.15) — (1.16) является рациональное распределение трудовых ресурсов.

Если матрица A продуктивна, то задача (1.15) — (1.16) допустима. В самом деле, возьмем, например, $\alpha=1$. В силу продуктивности матрицы A уравнение $x - xA = c$ имеет неотрицательное решение $\tilde{x}$. Поскольку $L>0$, то существует положительное число λ такое, что $(\lambda\tilde{x}, l)<L$. Тогда вектор $(\lambda\tilde{x}, l)$ является допустимым для задачи (1.15) — (1.16). Очевидно, что множество всех допустимых векторов ограничено и замкнуто. Следовательно, задача (1.15) — (1.16) имеет решение.

Построим к ней двойственную задачу:

$$\min Lq, \tag{1.17}$$

$$lq \geqslant (I - A)\,p,$$

$$(c, p) \geqslant 1, \tag{1.18}$$

$$p \geqslant 0, \; q \geqslant 0.$$

Здесь p — неотрицательный n-мерный вектор, q — число. Вектор p соответствует первому ограничению задачи (1.15) — (1.16), вектор q — второму, и согласно общей теории линейного программирования они интерпретируются как объективно обусловленные оценки вектора товаров c и общего количества трудовых ресурсов L.

Если матрица A неразложима, то любой вектор x, участвующий в решении (x, α) задачи (1.15)—(1.16), является строго положительным, $x>0$.

В самом деле, из продуктивности и неразложимости матрицы A вытекает, что $(I-A)^{-1}>0$. Тогда из (1.15) следует, что $x\geqslant\alpha c(I-A)^{-1}$. Если $c\geqslant0$, $c\neq0$, то $x>0$. Как мы уже показали, в решении (x, α) задачи (1.15) — (1.16) $\alpha>0$.

По теореме двойственности отсюда вытекает, что

$$lq = (I - A)\,p,$$

$$(c, p) = 1.$$

Тогда $p=q(I-A)^{-1}l$, подставляя в ограничение для p, получаем

$$q = \frac{1}{((I-A)^{-1}\,l, c)}. \tag{1.19}$$

Окончательно

$$p=\frac{1}{((I-A)^{-1}l,\ c)}(I-A)^{-1}l. \qquad (1.20)$$

Вернемся к системе (1.14). Если задача (1.14) имеет решение x, то $x=c(I-A)^{-1}$. (Напомним, что x — вектор валового выпуска.) Как отмечалось, трудовые затраты при этом выражаются числом $(x, l)=(c(I-A)^{-1}, l)=(c, (I-A)^{-1}l)$.

Таким образом, трудовые затраты, потребные для выпуска вектора конечного спроса c, равны $(c, (I-A)^{-1}l)$. В соответствии с этим вектор $l^*=(I-A)^{-1}l$ выражает вектор полных трудовых затрат, i-тая координата которого описывает полные трудовые затраты i-той отрасли.

Если интерпретировать вектор p как вектор цен на продукты, а число q — как заработную плату, приходящуюся либо на человеко-час, человеко-день, либо на одного работающего, то задача (1.17) — (1.18) состоит в определении этих величин с таким расчетом, чтобы минимизировать общий фонд заработной платы при условии, что чистая прибыль $p_i-(a_i, p)$ i-той отрасли, $i=1, 2, ..., n$, была неположительной.

Другой возможный подход к толкованию задачи (1.17) — (1.18) таков.

Как следует из теории двойственности, решения (x, α) и (p, q) взаимнодвойственных задач (1.15) — (1.16) и (1.17) — (1.18) удовлетворяют уравнению

$$\alpha=qL. \qquad (1.21)$$

Заметим, что поскольку $(c, p)=1$, то число α равно общей стоимости вектора товаров αc при ценах p. Если положительные компоненты вектора c соответствуют товарам потребительского спроса, то уравнение (1.21) выражает равенство спроса и предложения в стоимостном выражении — цена выпущенного объема конечной продукции равна общей сумме денег, полученных людьми, участвующими в процессе производства, в качестве заработной платы.

Если обозначить вектор полных трудовых затрат через l^*: $l^*=(I-A)^{-1}l$, а число $\frac{1}{(l^*, c)}$ через γ, то равенство (1.20) можно переписать в виде

$$p = \gamma l^{*}. \tag{1.22}$$

Основной интересующий нас вывод, касающийся изложенной модели, сводится к следующему:

вектор p цен на товары прямо пропорционален вектору полных трудовых затрат.

Этот вывод привлекает внимание, ибо совершенно очевидно, что он перекликается с теорией трудовой стоимости К. Маркса.

В самом деле, один из основных тезисов теории трудовой стоимости состоит в том, что в основе величины стоимости товара лежит количество общественно необходимого труда, потребного для производства этого товара. Таким образом, можно констатировать, что вывод, выражающийся равенством (1.22), не противоречит теории трудовой стоимости К. Маркса.

Подобные модели, включающие в явном виде коэффициенты затрат живого труда, рассматривались многими учеными-экономистами (см., например, [4]).

Следует лишь сожалеть о том, что некоторые из буржуазных ученых, получая на основе экономико-математических моделей, аналогичных изложенной нами, такой же вывод, делают поспешное заключение о том, что модель Леонтьева включает в себя трудовую теорию стоимости (см., например, книгу Ланкастера [3, с. 103]). Подобное рассуждение, на наш взгляд, по крайней мере наивно. Трудовая теория стоимости К. Маркса отражает весь сложнейший механизм образования стоимости с учетом всех специфических особенностей капиталистического способа производства, который ни в коем случае не может быть описан оптимизационной моделью типа задачи (1.15) — (1.16), поскольку эта задача является типичной для плановой экономики. Кроме того, для капиталистического способа производства в принципе не может выполняться условие (1.17), которое называется правилом нулевого дохода. Это правило состоит в том, что чистый доход каждой отрасли не превосходит объема заработной платы, выплачиваемой рабочим. В «Капитале» К. Маркса исчерпывающе описан весь механизм образования прибавочной стоимости и доказано, что капиталисты присваивают прибавочную стоимость, созданную трудом рабочих, т. е. оплачивают лишь часть затраченного рабочими труда. Причем такой вывод сделан Марксом не только на языке экономической науки, но и в рамках математической модели — мы имеем в виду схемы простого и расширенного воспроизводства, в которых отражен процесс распределения совокупного общественного продукта как по стоимости, так и в натурально-вещественной форме. Вместе с тем вывод буржуазных ученых о том, что модель Леонтьева «включает» в себя трудовую теорию стоимости, неправомерен хотя бы в силу того, что модель Леонтьева слишком примитивна, чтобы претендовать на получение серьезных политэкономических выводов.

Кроме тех недостатков модели Леонтьева, которые были перечислены в § 1 и 2 настоящей главы и которые заставляют даже при исследовании чисто технологических проблем организации общественного производства пользоваться вытекающими из нее рекомендациями с большой осторожностью, для модифицированной модели (с учетом затрат трудовых ресурсов) появляется ряд дополнительных обстоятельств.

Именно в ней предполагается, что объем трудовых ресурсов является вообще единственным ресурсом, ограничивающим объем производства. Ссылаться при этом на высказывания К. Маркса и А. Смита о том, что только естественные факторы, такие как труд, земля и т. д., ограничивают возможности производства, как это делает Ланкастер, значит, по нашему мнению, вульгаризировать существо дела. Ограниченность естественных факторов является единственным постоянно действующим ограничителем производства. В каждый же момент времени может существовать множество ресурсов, имеющихся в недостаточном количестве — так называемых «узких мест».

В связи с этим особенное значение приобретает для модифицированной модели Леонтьева недостаток, заключающийся в ее статичности. Как известно, К. Маркс подчеркивал исторический характер понятия стоимости. Величина стоимости товара складывается в процессе его производства, развернутого во времени. Поэтому, если пытаться получить с помощью экономико-математической модели выводы относительно величины и характера связи стоимости товара с параметрами модели, то такая модель необходимо должна быть динамической, учитывающей ограниченность всех ресурсов в начальный момент времени. Кроме того, желательно, чтобы подобная модель различала возможные типы труда — скажем, квалифицированный от простого.

§ 6. Теорема о замещении для модели Леонтьева

В изученной нами модели Леонтьева предполагалось, что каждая чистая отрасль имеет в своем распоряжении только один технологический способ для производства своего продукта — ему соответствует одна строка в технологической матрице A.

Можно рассмотреть более общий случай, когда всякий продукт может производиться с помощью нескольких технологических способов. Однако, как было показано П. Самуэльсоном [14], данный общий случай в некотором смысле сводится к обычной модели Леонтьева. Именно им было доказано, что при наличии единственного ресурса, ограничивающего производство (таким ресурсом может быть например, труд), из такой обобщенной модели Леонтьева можно выделить подмодель, являющуюся обычной моделью Леонтьева, которая по своим производственным возможностям не уступает всей модели, однако затрачивает минимально возможное количество данного ресурса. В этом параграфе мы изложим соответствующую теорему.

Опишем обобщенную модель Леонтьева.

Пусть в нашей производственной системе по-прежнему фигурирует n типов товаров. Имеется m технологических процессов $(m>n)$, каждый из которых выпускает один товар. Для определенности пусть множество $M=\{1, 2, ..., m\}$ разбито на n подмножеств M_k, $k=1, 2, ..., n$, так, что $M_k \cap M_{k'} = \varnothing$ при $k \neq k'$, $M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$.

Считаем, что процесс с номером $i \in M_k$ выпускает k-тый товар (продукт). Пусть $(m \times n)$-матрица $\bar{A}$ описывает технологию данного множества процессов. Именно строчка a_{ij} описывает затраты продуктов с номерами $j=1, 2, ..., n$, необходимые для выпуска i-тым технологическим процессом продукта с номером k, где $i \in M_k$. В отличие от обычной модели Леонтьева, матрица, описывающая выпуск в данной модели, обозначим ее через

$\hat{I}$, не будет квадратной единичной матрицей, а устроена следующим образом. $\hat{I}$ является прямоугольной $(m \times n)$-матрицей, состоящей из нулей и единиц, причем элемент e_{ij} этой матрицы равен

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in M_j, \\ 0, \text{ если } i \notin M_j. \end{cases}$$

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор интенсивностей, описывающий режим работы всех технологических способов обобщенной модели Леонтьева. Тогда затраты продуктов на производственные нужды в данной модели описываются вектором $x\hat{A}$, а валовой выпуск — вектором $x\hat{I}$. Если вектор конечного спроса равен c, $c \in R^n_+$, то уравнение, аналогичное основному уравнению в модели Леонтьева, имеет вид

$$x\hat{I} - x\hat{A} = c. \tag{1.23}$$

Будем считать, что сформулированная нами обобщенная модель Леонтьева является продуктивной, т. е. задача (1.23) имеет неотрицательное решение $x \in R^m_+$ при любом векторе конечного спроса $c \in R^n_+$. Для этого достаточно предположить, что существует набор из n технологических процессов по одному для каждого наименования товара, такой, что соответствующая этому набору обычная модель Леонтьева является продуктивной. Допустим, как мы это делали в предыдущем параграфе, что с каждым i-тым технологическим способом (строчкой матрицы $\hat{A}$) связано положительное число l_i — коэффициент трудовых затрат.

Обозначим матрицу $\hat{I} - \hat{A}$ через $\tilde{A}$, вектор $(l_1, l_2, ..., l_m)$ — через l и рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\min (l, x),$$
$$x\tilde{A} \geqslant c, \tag{1.24}$$
$$x \geqslant 0.$$

Содержательный смысл этой задачи ясен: обеспечить удовлетворение конечного спроса $c \geqslant 0$ с минимальными затратами трудовых ресурсов.

Определение. Назовем подмоделью обобщенной модели Леонтьева подмножество технологических способов с номерами $\sigma=(i_1, i_2, ..., i_n)$, где $i_k \in M_k$, $k=1, 2, ..., n$.

Подматрицы матриц $\hat{A}$ и $\tilde{A}$, составленные из строк с номерами из множества σ, будем обозначать $\hat{A}_\sigma$ и $\tilde{A}_\sigma$ соответственно.

Отметим, что технологическая матрица $\hat{A}_\sigma$ при этом определяет обычную модель Леонтьева, и $\tilde{A}_\sigma = I - \hat{A}_\sigma$. Модель $\hat{A}$ является продуктивной, если она обладает продуктивной подмоделью $\hat{A}_\sigma$. Для произвольного вектора $x=(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m$ через x_σ будем обозначать его проекцию в пространстве $\mathbf{R}^n$, задаваемую равенством $x_\sigma = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$.

Теорема 1.6 о замещении (П. Самуэльсон). Существует подмодель $\hat{A}_\sigma$ обобщенной модели Леонтьева $\hat{A}$ такая, что среди решений задачи (1.23) для произвольного конечного спроса $c>0$ найдется вектор $\hat{x}$, для которого $\hat{x}_i=0$, если $i \notin \sigma$, $\hat{x}_i>0$ при $i \in \sigma$.

Доказательство этой теоремы вытекает из ряда лемм, относящихся к теории линейного программирования.

Рассмотрим задачу, двойственную к (1.24):

$$
\begin{gathered}
\max (c, y), \\
\tilde{A}y \leqslant l, \qquad\qquad (1.25) \\
y \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Если интерпретировать двойственные переменные $y \in \mathbf{R}^n_+$ как цены на товары, считая, что заработная плата одного рабочего принята за 1, то (1.25) описывает задачу максимизации стоимости выпущенной продукции (чистого выпуска) при условии бесприбыльности производства.

Задачи (1.24) и (1.25) являются допустимыми. В самом деле, допустимость задачи (1.24) является следствием предположения о продуктивности обобщенной модели, а в задаче (1.25) нетрудно явно указать допустимый вектор: $y=0$.

По теореме двойственности (см. математическое введение) обе задачи (1.24) и (1.25) имеют решение. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — векторы, являющиеся решениями задач (1.24) и (1.25) соответственно. Обозначим вектор $\tilde{x}\tilde{A}=\tilde{c} \geqslant c > 0$.

Назовем решение x задачи (1.24) базисным, если вектор x имеет не более, чем n положительных координат.

Лемма 1.8. Задача (1.24) обладает базисным решением.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\tilde{x}$, являющийся решением задачи (1.24). Если он обладает не более чем n положительными координатами, то он базисный. Допустим, что $\tilde{x}$ базисным не является и рассмотрим строки матрицы $\bar{A}$, соответствующие положительным координатам вектора $\tilde{x}$. Обозначим соответствующую подматрицу матрицы $\bar{A}$ через $\bar{A}_\sigma$. Поскольку в матрице $\bar{A}_\sigma$ строк больше, чем n, то существует вектор z_σ такой, что $z_\sigma \bar{A}_\sigma = 0$, и у которого есть хотя бы одна положительная координата. Пусть x_σ — вектор, составленный только из положительных координат вектора $\tilde{x}$. Рассмотрим вектор $u_\sigma = \tilde{x}_\sigma - \gamma z_\sigma$, где $\gamma > 0$. Тогда $u_\sigma \bar{A}_\sigma = \tilde{c} \geqslant c$. Поскольку $\tilde{x}_\sigma > 0$, то число $\gamma > 0$ можно подобрать так, что вектор u_σ неотрицателен и имеет хотя бы одну нулевую координату. Построим исходя из вектора u_σ вектор u размерности m, дополнив вектор u_σ нулями на тех местах, где стоят нули в векторе $\tilde{x}$. Тогда вектор u является допустимым вектором задачи (1.24):

$$u\bar{A} = \tilde{c} \geqslant c, \; u \geqslant 0.$$

Кроме того, вектор u обладает важным для нас свойством: если $\tilde{x}_i = 0$, то $u_i = 0$. Из этого свойства, пользуясь второй частью утверждения теоремы двойственности, легко получить, что вектор u является решением задачи (1.24).

Мы описали процесс, позволяющий уменьшать число ненулевых координат в векторе — решении задачи (1.24). Тем самым лемма доказана.

Лемма 1.9. Структура базисного решения $\tilde{x}$ задачи (1.24) имеет следующий вид:
существует набор индексов $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $i_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем $\tilde{x}_{i_k} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{x}_i = 0$, если $i \notin \sigma$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из определения базисного решения и структуры матрицы $\tilde{A}$. Действительно, поскольку $\tilde{A}=\hat{I}-\hat{A}$, то $x\hat{I}-x\hat{A}\geqslant \geqslant c>0$. Учитывая, что

$$(\widetilde{x}\widehat{I})_k=\sum_{j\in M_k}\widetilde{x}_i>0,$$

имеем, что для всякого k, $k=1, 2, \ldots, n$, существует индекс i_k, $i_k\in M_k$, такой, что $\widetilde{x}_{i_k}>0$. Поскольку в базисном решении не может быть более, чем n положительных компонент, получаем окончательно, что $\widetilde{x}_i=0$, если $i\notin\sigma=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

Лемма 1.10. Пусть $c'\geqslant 0$ — произвольный вектор конечного спроса. Рассмотрим задачу (1.24), где в качестве вектора c фигурирует вектор c'. Тогда среди решений этой задачи существует вектор x', структура которого такая же, как у базисного решения $\widetilde{x}$, т. е. $\widetilde{x}'_{i_k}>0$, $k=1, 2, \ldots, n$, $x'_i=0, i\notin\sigma$, где σ — набор индексов, существование которого утверждается в лемме 1.9.

Доказательство. Рассмотрим модель Леонтьева, соответствующую строкам матрицы $\tilde{A}$ с номерами из множества σ. Пусть $\tilde{A}_\sigma$ — соответствующая квадратная $(n\times n)$-матрица. Тогда существует вектор $\widetilde{x}_\sigma$ такой, что $\widetilde{x}_\sigma\widetilde{A}_\sigma=c>0$. Следовательно, модель $\tilde{A}_\sigma$ продуктивна. Поэтому существует вектор $x'_\sigma\geqslant 0$ такой, что $x'_\sigma\widetilde{A}_\sigma=c'$. Построим m-мерный вектор x', положив $x'_i=(x'_\sigma)_i$, если $i\in\sigma$, $x'_i=0$, если $i\notin\sigma$. Ясно, что $x'\geqslant 0$, $x'\tilde{A}=c'$. Следовательно, вектор x' допустим для нашей задачи. Покажем его оптимальность.

Рассмотрим вектор $\widetilde{y}$, являющийся решением задачи (1.25). Этот вектор является допустимым и в том случае, когда в (1.25) вектор c замещен вектором c'. Поскольку векторы x и y являются оптимальными каждый для своей задачи, то по теореме двойственности выполняются следующие утверждения:

$$\widetilde{y}_j>0\Rightarrow(\widetilde{x}\widetilde{A})_j=c_j,$$

$$\widetilde{x}_i>0\Rightarrow(\widetilde{A}\widetilde{y})_i=l_i.$$

Рассмотрим пару векторов $(x', \widetilde{y})$. Каждый из них допустим для задач (1.24), (1.25) соответственно, когда вектор c заменен на c'. Вместе с тем поскольку $x'\tilde{A} = \tilde{c} = \tilde{x}\tilde{A}$ и нули у вектора x' и x располагаются на одних и тех же координатах, то выполняются аналогичные импликации:

$$\tilde{y}_j > 0 \Rightarrow (x'\tilde{A})_j = c_j,$$

$$x'_i > 0 \Rightarrow (\tilde{A}\tilde{y})_i = l_i.$$

Вновь пользуясь теоремой двойственности, заключаем, что вектор x' является решением задачи.

Из лемм 1.8 — 1.10 непосредственно вытекает доказательство теоремы 1.6.

Таким образом, при необходимости экономить трудовые ресурсы каждая отрасль может использовать постоянно один и тот же из возможных технологических процессов при производстве любого вектора конечного спроса. Возникает вопрос, чем же набор способов, отвечающий множеству индексов σ в теореме Самуэльсона, выделяется из остальных? Ответ на него дает следующее следствие теоремы 1.6.

Пусть σ' — произвольный набор индексов $\sigma' = \{i'_1, i'_2, \ldots, i'_n\}$ так, что $i'_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда этот набор задает модель Леонтьева $\hat{A}_{\sigma'} = I - \tilde{A}_{\sigma'}$ и соответствующий вектор прямых затрат трудовых ресурсов $l_{\sigma'}$. Если подмодель $\hat{A}_{\sigma'}$ продуктивна, то, подобно тому, как мы это делали в предыдущем параграфе, обозначим через $l^*_{\sigma'}$ вектор полных затрат трудовых ресурсов

$$l^*_{\sigma'} = (I - \hat{A}_{\sigma'})^{-1}\, l_{\sigma'}.$$

Теорема 1.7.

$$l^*_{\sigma} \leqslant l^*_{\sigma'}.$$

Доказательство. Рассмотрим задачи:

$$\min\,(l_\sigma, x_\sigma),$$

$$x_\sigma - x_\sigma\hat{A}_\sigma \geqslant c, \tag{1.26}$$

$$x_\sigma \geqslant 0;$$

$$\min\,(l_{\sigma'}, x_{\sigma'}),$$

$$x_{\sigma'} - x_{\sigma'}\hat{A}_{\sigma'} \geqslant c, \tag{1.27}$$

$$x_{\sigma'} \geqslant 0.$$

Задача, двойственная к (1.26), такова:

$$\max(y, c),$$
$$(I-\hat{A}_\sigma)\, y \leqslant l_\sigma, \tag{1.28}$$
$$y \geqslant 0.$$

Поскольку $c>0$, то как мы уже видели, $x_\sigma>0$. По теореме двойственности отсюда вытекает, что если y_σ — решение задачи (1.28), то $(I-\hat{A}_\sigma)\,y_\sigma = l_\sigma$, т. е. $l_\sigma^* = (I-\hat{A}_\sigma)^{-1}\, l_\sigma = y_\sigma$. Точно так же имеем для решения задачи, двойственной к (1.27)

$$l_{\sigma'}^* = (I-\hat{A}_{\sigma'})^{-1}\, l_{\sigma'} = y_{\sigma'}.$$

С другой стороны, вновь по теореме двойственности

$$(y_{\sigma'}, c) = (x_{\sigma'}, l_{\sigma'}),$$
$$(y_\sigma, c) = (x_\sigma, l_\sigma),$$

где x_σ, $x_{\sigma'}$ — решения задач (1.26), (1.27) соответственно. Учитывая, что при любом векторе конечного спроса $c>0$ имеет место неравенство $(x_\sigma, l_\sigma) \leqslant (x_{\sigma'}, l_{\sigma'})$, получаем $(y_\sigma, c) \leqslant (y_{\sigma'}, c)$ или $(l_\sigma^*, c) \leqslant (l_{\sigma'}^*, c)$. Из произвольности вектора $c>0$ заключаем, что $l_\sigma^* \leqslant l_{\sigma'}^*$.

Таким образом, мы получили следующую характеристику подмодели $\hat{A}_\sigma$: вектор полных трудовых затрат l_σ^* этой подмодели по всем координатам не больше вектора полных трудовых затрат любой другой продуктивной подмодели.

Задачи

1. Пусть A — неразложимая матрица. Верно ли, что A^2 также неразложима?

2. Доказать, что матрица A разложима тогда и только тогда, когда разложима матрица A'.

3. Доказать, что если $\lambda_A=0$, то матрица A разложима.

4. Установить следующие свойства фробениусова собственного числа матрицы A:
$\lambda_A=\lambda$, $\lambda_{A^k} = \lambda_A^k$, $\lambda_{\alpha A}=\alpha\lambda_A$ при $\alpha\geqslant 0$, $\lambda_A\geqslant\lambda_B$, если

$A \geqslant B \geqslant 0$. Указание: воспользоваться характеристикой числа λ_A как максимума функции $Ax//x$.

5. Доказать, что $\lambda_A = 0$ тогда и только тогда, когда $A^k = 0$ при некотором натуральном k.

6. Доказать, что если для любых двух индексов i, j существует такая последовательность $i_1 = i$, i_2, ..., $i_m = j$, что $a_{i_l i_{l+1}} > 0$, $l = 1, 2, ..., m-1$, то матрица A неразложима.

7. Доказать лемму 1.6.

8. Доказать, что если $\lambda_A < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. Указание: воспользоваться понятием нормы оператора, индуцированной нормой $\|\cdot\|_A$ в пространстве $\mathbf{R}^n$.

9. Доказать, что если $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, то матрица $I - A$ невырожденна.

10. Произвольная квадратная матрица P называется положительно определенной, если $xPx > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. Доказать, что если матрица $A^* = I - A$ положительно определена ($A \geqslant 0$), то модель Леонтьева продуктивна. Если использовать критерий Сильвестра для положительно определенных матриц (см. [15, теорема 3 на с. 277], то получаем следующее условие продуктивности модели Леонтьева, известное как условие Хоукинса — Саймона (см. [2, с. 127]):

модель Леонтьева продуктивна, если все последовательные главные миноры матрицы A^* положительны.

11. Доказать, что если $x \geqslant 0$, то $\|Ax_A\| = \lambda_A \|x_A\|$.

12. Пусть $A \geqslant 0$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = B \neq 0$. Доказать, что $\lambda_A = 1$.

13. Пусть A — неразложимая матрица и $B = \lim\limits_{k\to\infty} A^k$. Доказать, что всякий столбец (строка) матрицы B является правым (левым) вектором Фробениуса матрицы А.

14. Пусть $A \geqslant 0$ — неразложимая матрица, $\lambda_A = 1$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = B$, то $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = x_A^i y_A^j / (x_A, y_A)$. Здесь x_A, y_A — фиксированные правый и левый векторы Фробениуса матрицы A.

15. Если матрица A неразложима и устойчива, то $A^k > 0$ для некоторого натурального k. Доказать. Указание: одно из возможных решений основывается на предыдущей задаче.

16. Верно ли, что если матрица $\bar{A}^k$, где $k>1$ действует на подпространстве $\mathcal{L}_A$ как оператор сжатия, то это же верно относительно матрицы $\bar{A}$?

Глава 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГООТРАСЛЕВЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Изложенная в гл. 1 модель Леонтьева, как уже отмечалось, носит статический характер. В ней не учитывается фактор времени, играющий важнейшую роль при составлении плана. Этот недостаток не является непреодолимым — модель Леонтьева допускает динамическую, развернутую во времени формулировку. Мы, однако, изложим более общую динамическую модель, носящую имя ее автора — Дж. фон Неймана. Модель Неймана включает в себя модель Леонтьева как частный случай и отличается от нее тем, что в ней допускается совместное производство в каждом технологическом процессе (отрасли) нескольких видов товаров. Тем самым устраняется существенный недостаток модели Леонтьева, заключающийся в оперировании понятием «чистой» отрасли. Тем не менее мы часто будем обращаться к модели Леонтьева в иллюстративных целях. Так, качественное описание оптимальных траекторий в задаче перспективного планирования (теорему о магистрали) мы приведем для модели Леонтьева с тем, чтобы продемонстрировать основную идею, не слишком усложняя доказательство. Обстоятельное изложение теории модели Неймана и подробную библиографию можно найти в [5].

Модель Неймана породила большое число исследований, в ходе которых было выяснено, что основные свойства этой модели не связаны со спецификой описания производственного сектора на языке матриц. Оказалось, что основную роль играют предположения о линейности и замкнутости. В связи с этим Д. Гейл предложил более общую конструкцию, которая с математической точки зрения несколько удобнее для изучения. Мы приводим конструкцию Гейла, которой за последнее время посвящено несколько специальных исследований. В то же время, нам кажется, что модель Неймана является более перспективной с точки зрения практического использования, хотя ее методология в этом направлении далеко не так разработана, как, скажем, для модели межотраслевого баланса.

Растущая популярность модели Неймана объясняется еще и тем фактом, что многие линейные модели, носящие более специальный характер, как выяснилось, могут быть сведены либо прямо к конструкции Неймана, либо к модели, весьма ей близкой. Здесь мы имеем в виду такие модели производства, в которых с гораздо большей подробностью описывается процесс производства с учетом различной длительности разных технологических процессов, и такие модели, которые включают в себя отрасли: «образование», «внешняя торговля» и т. д. При этом теоретическое исследование подобных моделей, как правило, удобнее проводить, придав им форму модели Неймана.

Таким образом, модель Неймана представляет собой существенный шаг вперед по сравнению с моделью Леонтьева. Вместе с тем до сих пор наиболее интересные результаты в теории этих моделей получены по-прежнему в предположении о постоянстве технологии, ее неизменности во времени. В наше время бурного технического прогресса этот недостаток, конечно, существен. Если ничего не предполагать заранее о характере изменения со временем технологических способов производства, то вряд ли можно ожидать содержательных результатов о рациональных путях развития экономики. С другой стороны, предположение, что нам известно все о возможных технологических переменах в общественном производстве, также не всегда оправдано даже в условиях планового хозяйства. В связи с этим представляет интерес постановка проблемы выбора перспективного плана развития в условиях неопределенности относительно состояний технологии в будущем. Формулировка соответствующих понятий и их иллюстрация на языке модели Леонтьева содержится в работах польского ученого Е. Лоша (Лося) [16, 17]. При этом полученные им результаты очевидным образом перекликаются с «магистральным» свойством оптимальных траекторий для моделей неймановского типа.

§ 1. Описание модели Неймана

Рассмотрим экономику, описываемую парой (X, K), где X — пространство товаров, K — множество производственных процессов, перерабатывающих некоторые количества товаров в другие количества тех же товаров.

Под товаром (продуктом) мы понимаем как первичные факторы производства (земля, труд) и сырье (нефть, уголь и т. д.), так и конечные продукты производства, услуги и т. п.

Пусть имеется n наименований продуктов (G_i, $i=1, 2, \ldots, n$). Тогда в нашем случае множество X представляет собой неотрицательный ортант $\mathbf{R}^n_+$ n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$.

В модели Дж. фон Неймана множество K состоит из конечного числа процессов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, которые называются базисными. Каждый базисный процесс Q_i представляет собой пару векторов из множества X: $Q_i=(a_i, b_i)$. Содержательный смысл процесса Q_i таков: данный процесс затрачивает вектор товаров $a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, где a_{ij} — количество товара G_j, $j=1, 2, \ldots, n$, и производит вектор товаров $b_i=(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$. По своему смыслу все векторы a_i, b_i, $i=1, 2, \ldots, n$, неотрицательны.

Обозначив $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, получаем, что технология нашей модели задается парой неотрицательных матриц (A, B). Матрица A называется матрицей затрат, B — матрицей выпуска.

Определим неотрицательную линейную комбинацию базисных процессов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ как новый процесс, в котором затраты и выпуск являются линейной комбинацией векторов затрат a_i и выпуска b_i, $i=1, 2, \ldots, m$, базисных процессов:

$$z_1Q_1 + z_2Q_2 + \ldots + z_mQ_m = \left(\sum_{i=1}^{m} z_ia_i, \sum_{i=1}^{m} z_ib_i\right) = (zA, zB),$$

$$\text{где } z_i \geqslant 0,\ i = 1,2\ \ldots,\ m,\ z=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m).$$

Вектор z будем называть вектором интенсивностей и говорить, что в процессе (zA, zB) участвует базисный процесс Q_i с интенсивностью z_i. Получившееся более широкое множество процессов будем обозначать буквой **C**, $\mathbf{C}=\{(x, y)\,|\,x=zA, y=zB, z\geqslant 0\}$.

В то время как базисные процессы Q_i, $i=1, 2, \ldots, m$, соответствуют, вообще говоря, реальным отраслям, заводам, фабрикам, каждый элемент $(x, y)\in\mathbf{C}$ есть некоторый фиктивный процесс, описывающий определенный режим совместной работы этих отраслей, заводов, фабрик. При этом вектор x представляет собой вектор затрат товаров при таком режиме работы, а y — вектор выпуска.

Ясно, что рассмотренная нами в главе 1 модель Леонтьева является частным случаем модели Неймана при $n=m$, $B=I$. Основное отличие состоит в том, что всякий базисный процесс Q_i может выпускать не один продукт.

По своему определению наша модель линейна.

Перейдем к описанию динамики модели Неймана. В дальнейшем нам нигде не потребуется выписывать координаты z_i вектора интенсивностей z. Поэтому, не опасаясь недоразумений, мы будем обозначать через z_t вектор интенсивностей, описывающий функционирование нашей производственной системы в период $(t-1, t)$.

Рассмотрим T периодов времени (скажем, лет). В каждый период $(t-1, t)$ для производства продукции применяется один из процессов множества **C**, характеризующийся вектором интенсивностей z_t.

Кроме линейности модели мы сделаем еще одно очень важное предположение: модель Неймана замкнута.

Это означает, что для производства в период $(t, t+1)$ мы можем тратить лишь те продукты, которые были произведены в предыдущий период времени $(t-1, t)$. Поскольку выпуск в период $(t-1, t)$ равен z_tB, а затраты в период $(t, t+1)$ равны $z_{t+1}A$, то математически предположение о замкнутости модели записывается следующей серией неравенств:

$$z_1 A\leqslant z_0, \tag{1.29}$$

$$z_{t+1} A\leqslant z_t B,\ t=1, 2, \ldots, T-1.$$

Вектор z_0 представляет собой вектор запасов, имеющихся к началу нашего планового периода $[0, T]$. Последовательность векторов $z_1, z_2, \ldots, z_T$, удовлетворяющих системе неравенств (5), будем называть планом с началом z_0 и обозначать $\{z_t\}$.

При исследовании планов в модели Неймана часто оказывается полезным понятие цен на товары.

Обозначим через p_t^j цену одной единицы продукта G_j в период $(t-1, t)$. Соответствующий вектор цен обозначим p_t. Величина $p_{t+1}b_i - p_t a_i$ выражает доход процесса Q_i за период $(t-1, t)$. Можно, например, считать, что в начале периода $(t-1, t)$ тратятся средства на закупку сырья в количестве a_i, по ценам p_t данного периода; затем произведенная продукция b_i продается уже по ценам следующего периода. Естественно, $p_t \geqslant 0$. Основное предположение относительно цен состоит в следующем: никакой из процессов Q_i, $i=1, 2, \dots, m$, не приносит положительного дохода. Другими словами,

$$p_{t+1} b_i - p_t a_i \leqslant 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

$$t = 1, 2, \dots, T-1, T,$$

или

$$Ap_t \geqslant Bp_{t+1}, \qquad (1.30)$$

$$t = 1, 2, \dots, T.$$

Можно по-разному относиться к содержательной трактовке предположения (1.30). Иногда предпочитают говорить, что цены (двойственные оценки) p_t являются лишь математическим инструментом при доказательстве фактов относительно данной модели. Тогда, естественно, относительно p_t можно делать любые предположения, используя их в дальнейшем.

Однако можно попытаться придать величинам p_t содержательную интерпретацию, трактуя их как реальные цены и истолковывая получаемые математические факты о них как рекомендацию о рациональной структуре цен на товары.

Условие (1.30) часто называют правилом нулевого дохода. На первый взгляд оно выглядит парадоксально, особенно если отнести его к капиталистической экономике. В самом деле, какой смысл капиталистам осуществлять производство, если оно в лучшем случае бесприбыльно? Однако этот парадокс кажущийся. В самом деле, обратим внимание на то, что величины дохода $p_{t+1}b_i$ и $p_t a_i$ i-того процесса (отрасли, фирмы, предприятия) относятся к разным моментам времени. Допустим, что владелец i-той фирмы обладает капиталом k в начале периода $(t-1, t)$. Тогда он может на эту сумму закупить сырье и осуществить производство с интенсивностью z (здесь z — число), удовлетворяющей условию $(za_i, p_t)=k$. В том случае, если его доход окажется равным нулю, т. е. $(zb_i, p_{t+1})=k$, то в начале периода $(t, t+1)$ он будет также обладать капиталом k. Попробуем сравнить покупательную способность денежного капитала k в периоды $(t-1, t)$ и $(t, t+1)$. Пусть вектор $\hat{x}\in\mathbf{R}^n_+$ задает некий комплект товаров. Тогда в период $(t-1, t)$ на сумму k можно приобрести $\delta_t=k/(\hat{x}, p_t)$ штук таких комплектов, а в период $(t, t+1)$ — $\delta_{t+1}=k/(\hat{x}, p_{t+1})$ штук. Как будет показано, для расширяющейся экономики характерен случай, когда цены на товары со временем падают, т. е. $p_{t+1}<p_t$ и, следовательно, $\delta_{t+1}>\delta_t$. Другими словами, покупательная способность денежного капитала k в период $(t, t+1)$ будет выше его покупательной способности в предыдущем периоде. Предположение о том, что максимальная прибыль каждого процесса ограничена сверху нулем, есть лишь еще одно своеобразное требование о замкнутости модели — оно выражает требование, чтобы с ростом общего числа продуктов денежная масса не увеличивалась.

Можно было бы считать, что прибыль каждого процесса (отрасли) Q_i ограничена сверху одним и тем же числом, общим для всех отраслей. На самом деле, это и есть основное содержание правила нулевого дохода (2.2): максимальная возможная прибыль во всех отраслях одинакова. А это значит, что правило нулевого дохода есть лишь иная форма знаменитой гипотезы Адама Смита о тенденции выравнивания нормы прибыли в разных отраслях народного хозяйства при его нормальном функционировании — в случае капиталистического способа производства это означает так называемую «совершенную конкуренцию». Общеизвестно также мнение К. Маркса[1], решительно подтверждающее эту гипотезу.

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Т. 26, ч. 1, с. 167.

Последовательность цен p_t, $t=1, 2, \ldots, T+1$, удовлетворяющую системе неравенств (1.30), будем называть траекторией цен и обозначать $\{p_t\}$.

Наконец, запишем явно предположение, что общая масса денег не меняется и постоянно находится в обращении.

Первое предположение записывается в виде равенства

$$z_t A p_t = z_t B p_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{1.31}$$

Второе предположение означает, что в начале каждого периода $(t, t+1)$ вся сумма денег $z_t B p_{t+1}$, вырученная от продажи продукции предыдущего производственного цикла, идет на приобретение сырья для производства в данном периоде. Замечая, что количественное выражение денежных затрат в начале периода $(t, t+1)$ равно $z_{t+1} A p_{t+1}$, получаем уравнение

$$z_t B p_{t+1} = z_{t+1} A p_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1. \tag{1.32}$$

Важную роль при изучении произвольных траекторий интенсивностей и цен играют самые простые из возможных динамических траекторий, так называемые стационарные.

Определение. Траектория интенсивностей $\{z_t\}$ называется стационарной, если существует такое число $\nu>0$, что $z_t=\nu z_{t-1}$, или, что то же самое, $z_t=\nu^t z_0$, $t=1, 2, \ldots$.

Для того чтобы последовательность $z_t=\nu^t z_0$ была стационарной траекторией интенсивностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\nu z A \leqslant z B \quad (z = z_0). \tag{1.33}$$

Введем в рассмотрение функцию $\alpha(z)$, где $\alpha(z) = zB \| zA$. Число $\alpha(z)$ назовем технологическим темпом роста модели на луче νz, $\nu \geqslant 0$. Содержательный смысл числа $\alpha(z)$ понятен: при развитии по стационарной траектории $z_t=\nu^t z$ производство всех продуктов остается в неизменной пропорции, хотя общий объем растет (или убывает!) в геометрической прогрессии со знаменателем ν. Число $\alpha(z)$ показывает, с каким максимальным темпом может расширяться экономика, сохраняя соотношение всех продуктов в пропорции, определяемой вектором z.

Определение. Траектория цен $\{p_t\}$ называется стационарной, если существует такое число $\mu>0$, что $\mu p_{t+1}=p_t$, или $\mu^t p_{t+1}=p$, $(p_0=p)$.

Последовательность $p_{t+1}=\frac{1}{\mu^t}p$ будет траекторией цен тогда и только тогда, когда

$$\mu Ap \geqslant Bp. \tag{1.34}$$

Введем в рассмотрение функцию $\beta(p)=\min\mu$, где минимум берется по всем $\mu\geqslant 0$ таким, что $\mu Ap\geqslant Bp$. Число $\beta(p)$ показывает, с какой минимальной скоростью должны падать цены (или расти!) на продукты производства, оставаясь на луче μp, $\mu\geqslant 0$, чтобы всякий процесс не приносил положительной прибыли.

Число $\beta(p)$ называется экономическим темпом роста модели на луче μp, $\mu\geqslant 0$.

Для стационарных траекторий $z_t=\nu^t z$, $p_t=\mu p_{t+1}$ равенства (1.31) и (1.32) принимают соответственно вид

$$\mu zAp = zBp, \tag{1.35}$$

$$\nu zAp = zBp. \tag{1.36}$$

Определение. Говорят, что модель фон Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, z, μ, p), где μ, ν — положительные числа, z, p — неотрицательные ненулевые векторы, если выполнены условия (1.33)—(1.36):

$$\begin{gathered}\nu zA \leqslant zB,\\ \mu Ap \geqslant Bp,\\ \mu zAp = zBp,\\ \nu zAp = zBp.\end{gathered} \tag{1.37}$$

Величина zBp представляет собой стоимость выпуска в состоянии равновесия модели Неймана, составляющими которого являются векторы z и p. Поэтому представляется естественным условием, чтобы эта величина была ненулевой.

Определение. Состояние равновесия (v, z, μ, p) модели Неймана называется невырожденным, если $zBp > 0$.

§ 2. Существование равновесия в модели Неймана

При некоторых ограничениях на матрицы A и B Дж. фон Нейман доказал существование решения системы (1.37). Однако условия, наложенные Нейманом на матрицы A и B, не допускают хорошей экономической интерпретации и впоследствии были заменены более подходящими требованиями другими авторами (см. [18]).

Теорема 1.8. Пусть матрицы $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ таковы, что в матрице A нет нулевых строк, а в матрице B нет нулевых столбцов. Тогда существует решение системы (1.37), обладающее следующими свойствами:

$$zBp > 0, \tag{1.38}$$

$$v\, za^j < zb^j \Rightarrow p_j = 0, \tag{1.39}$$

$$\mu\, a_i p > b_i p \Rightarrow z_i = 0, \tag{1.40}$$

$$v = \mu. \tag{1.41}$$

Условия теоремы 1.8 допускают экономическую трактовку. Требование $a_i \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, означает, что у нас нет процессов, которые ничего не тратят — из ничего нельзя что-либо произвести. Условие $b^j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, означает, что всякий продукт производится в нашей модели, что тоже естественно, ибо наша модель замкнута.

Изучим вначале подробнее строение технологического множества $\mathbf{C} = \{(x, y) \mid x = zA,\ y = zB,\ z \geqslant 0\}$. Нетрудно видеть, что множество $\mathbf{C}$ является выпуклым конусом (см. введение) в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$. Важно, однако, и еще одно его свойство.

Определение. Выпуклый конус $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^k$ называется многогранным, если существует конечное число векторов $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbf{C}$ таких, что произвольный вектор

$c \in \mathbf{C}$ является их неотрицательной линейной комбинацией:

$$\mathbf{C} = \left\{ c \mid c = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i c_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, s \right\}.$$

Будем называть элементы c_i, $i=1, 2, \ldots, s$, образующими и говорить, что конус $\mathbf{C}$ натянут на эти образующие. Многогранный конус является замкнутым множеством. Этот геометрический факт интуитивно очевиден, один из возможных способов доказательства изложен в задачах 8—11 в конце данной главы.

Нетрудно видеть, что наше технологическое множество $\mathbf{C}$ является многогранным конусом. Он натянут на конечное число векторов (a_i, b_i), $i=1, 2, \ldots, m$.

Число $\alpha_M = \sup\limits_{z \geqslant 0} \alpha(z)$ назовем технологическим темпом роста модели Неймана.

Процесс $c=(x, y)$, $x=zA$, $y=zB$, будем называть оптимальным, если $\alpha(x, y) \equiv \alpha(z) = \alpha_M$.

Отметим, что множество оптимальных процессов образует выпуклый конус: если $\alpha(z_1)=\alpha(x_1, y_1)=\alpha_M$, $\alpha(z_2)=\alpha(x_2, y_2)=\alpha_M$, т. е. $\alpha_M x_i \leqslant y_i$, $i=1, 2$, то $\alpha_M(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$, т. е. $\alpha(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2) \geqslant \alpha_M$, откуда $\alpha(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)=\alpha_M$ по определению α_M.

Будем говорить, что продукт G_j перепроизводится процессом $c=(x, y)$, $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, если $\eta_j / \xi_j > \alpha_M$.

Очевидно, что если какие-либо продукты перепроизводятся некоторыми оптимальными процессами, то существует оптимальный процесс, перепроизводящий сразу все такие продукты. Указанный оптимальный процесс будем называть характеристическим.

Отметим два важных свойства нашего многогранного конуса $\mathbf{C}$. Пусть φ — проекция пространства $\mathbf{R}^n$ на пространство $\mathbf{R}^k$, $k \leqslant n$. Определим проекцию $\mathbf{C}\varphi$ равенством

$$c\varphi = (x, y)\,\varphi = (x\varphi, y\varphi).$$

Лемма 1.11. Проекция $\mathbf{C}\varphi$ выпуклого замкнутого многогранного конуса $\mathbf{C}$ является выпуклым замкнутым многогранным конусом.

Доказательство. Обозначим через $\overline{A}$ и $\overline{B}$ матрицы, строками которых являются векторы $a_i\varphi$ и $b_i\varphi$,

$i=1, 2, \ldots, m$, соответственно. Тогда очевидно $\mathbf{C}\varphi$ совпадает с конусом $\overline{\mathbf{C}}=\{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x}=\bar{z}A, \; \bar{y}=\bar{z}B, \; \bar{z}\geqslant 0\}$. С каждым технологическим конусом $\mathbf{C}=\{(x, y)\}$ свяжем множество

$$C_\gamma=\{u \mid u=\gamma x-y, (x, y) \in \mathbf{C}\}.$$

Лемма 1.12. Если $\mathbf{C}$ — многогранный выпуклый замкнутый конус, то $\mathbf{C}_\gamma$ — также многогранный выпуклый замкнутый конус.

Очевидно, так как

$$\mathbf{C}_\gamma=\{u \mid u=z(\gamma A-B), z\geqslant 0\}.$$

Лемма 1.13. В условиях теоремы 1.8 технологический темп роста α_M модели Неймана удовлетворяет условиям $0<\alpha_M<\infty$ и реализуется на некотором процессе $\bar{c}\in\mathbf{C}$.

Доказательство. Поскольку сумма строк матрицы B есть положительный вектор, то для процесса $c=(eA, eB)$, где $e=(1, 1, \ldots, 1)$, имеем $\alpha(c)>0$; отсюда вытекает, что $\alpha_M>0$. Вторая часть утверждения леммы следует из того факта, что функция $\alpha(z)=zB\|zA$, во-первых, положительно однородна нулевой степени и, значит, ее можно рассматривать, например, только на множестве $\mathbf{Z}=\{z \mid z\geqslant 0, \; \sum_{i=1}^{m} z_i=1\}$, во-вторых, она полунепрерывна сверху на этом множестве. Доказательство этого вполне аналогично рассуждению, которое мы приводим при доказательстве теоремы Фробениуса — Перрона в гл. 1 при установлении полунепрерывности сверху функции $\rho(x)$. Надо лишь убедиться, что функция $\alpha(z)$ определена во всех точках множества $\mathbf{Z}$. Другими словами, надо показать, что если $z\geqslant 0$, $z\neq 0$, то $zA\neq 0$. Это, однако, немедленно следует из условия, что в матрице A нет нулевых строк. Применяя теперь теорему Вейерштрасса к компакту $\mathbf{Z}$ и функции $\alpha(z)$, получаем утверждение леммы.

После доказательства существования оптимальных процессов в технологическом конусе $\mathbf{C}$, можно утверждать и существование характеристического процесса.

Пусть для конуса $\mathbf{C}$ характеристический процесс (x^*, y^*) имеет вид

$$x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*),$$

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*, y_{k+1}^*, \ldots, y_n^*),$$

где

$$\alpha_M x_j^* = y_j^*, \ j = 1, 2, \ldots, k; \ \alpha_M x_j^* < y_j^*, \ j \geqslant k+1.$$

Определим проекцию φ пространства $\mathbf{R}^{2n}$ на пространство $\mathbf{R}^{2k}$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_k)$. По лемме 1.11 образ $\mathbf{C}\varphi$ — выпуклый, замкнутый, многогранный конус. Пусть $\alpha_{M\varphi}$ — технологический темп роста модели Неймана, определяемый конусом $\mathbf{C}\varphi$.

Лемма 1.14. Пусть $c\varphi = (x\varphi, y\varphi)$ — такой процесс, что $\alpha(c\varphi) \geqslant \alpha_M$. Тогда $y\varphi = \alpha_M x\varphi$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда вектор $c = (x, y) \in \mathbf{C}$ обладает следующими свойствами: $\alpha_M x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и существует номер i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant k$, для которого $\alpha_M x_{i_0} < y_{i_0}$. Пусть $c^* = (x^*, y^*)$ — характеристический процесс в конусе $\mathbf{C}$. Тогда

$$\alpha_M x_i^* = y_i^*, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\alpha_M x_i^* < y_i^*, \ i = k+1, \ldots, n.$$

Построим оптимальный процесс в конусе $\mathbf{C}$, который перепроизводит большее количество продуктов, чем процесс (x^*, y^*), что, как мы знаем, невозможно. Пусть $\tilde{c} = \lambda c^* + c = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n; \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$.
Тогда

$$\tilde{x}_i = \lambda x_i^* + x_i,$$

$$\tilde{y}_i = \lambda y_i^* + y_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Подберем число $\lambda > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_M \tilde{x}_i < \tilde{y}_i, \ i = k+1, \ldots, n.$$

Нетрудно убедиться, что для этого достаточно взять

$$\lambda > \max_{k+1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\alpha_M x_i - y_i}{y_i^* - \alpha_M x_i^*}.$$

Данный максимум конечен в силу неравенств $\alpha_M x_i^* < y_i^*$, $i > k$. Легко видеть, что при таком выборе λ процесс $\tilde{c}$ оптимален и

$$\alpha_M(\lambda x^*_{i_0} + x_{i_0}) < \lambda y^*_{i_0} + y_{i_0}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. $\alpha_{M\varphi} = \alpha_M$.

Следствие 2. В конусе $\mathbf{C}\varphi$ во всяком оптимальном процессе нет перепроизводства.

Доказательство теоремы 1.8. Рассмотрим конус $U = (\mathbf{C}\varphi)_{\alpha_M} = \{u \mid u = \alpha_M x\varphi - y\varphi,\ (x, y) \in \mathbf{C}\}$. По лемме 1.12 множество U — выпуклый замкнутый конус. Если $u \in U$, $u \leqslant 0$, то из леммы 1.14 следует, что в этом случае $u = 0$. Другими словами, выпуклый замкнутый конус U имеет только нулевое пересечение с неположительным ортантом $\mathbf{R}^k_-$ пространства $\mathbf{R}^k$.

По лемме В.1 об отделимости получаем, что в пространстве $\mathbf{R}^k$ найдется вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $p_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такой, что $(u, p) \geqslant 0$ для всех $u \in U$. Дополним вектор p нулями до размерности n, обозначив получившийся n-мерный вектор p^*. По построению вектора $p^* \geqslant 0$ имеем

$$y^* p^* > 0,$$

$$\alpha_M p^* x^* = y^* p^*,\ \alpha_M x^* \leqslant y^*,$$

$(p^*, \alpha_M x - y) \geqslant 0$ для всех $(x, y) \in \mathbf{C}$. Обозначив $x^* = z^* A$, $y^* = z^* B$, $x = zA$, $y = zB$; z^*, $z \geqslant 0$ получаем

$$z^* B p^* > 0,$$

$$\alpha_M z^* A p^* = z^* B p^*,$$

$$\alpha_M z^* A \leqslant z^* B,$$

$$(\alpha_M z A - zB, p^*) = (z, \alpha_M A p^* - B p^*) \geqslant 0 \text{ для всех } z \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\alpha_M A p^* \geqslant B p^*$. Таким образом, тройка (α_M, z^*, p^*) является решением системы (1.37) при $\nu = \mu = \alpha_M$. Осталось проверить выполнение условий (1.38)—(1.41). Условия (1.39)—(1.40) непосредственно вытекают из равенства

$$z^* (\alpha_M A - B) p^* = 0,$$

условие (1.41) — из определения α_M. Теорема 1.8 доказана.

Таким образом, в условиях теоремы 1.8 доказано существование невырожденного равновесия в модели Неймана. Отметим, что для невырожденного положения равновесия модели Неймана сразу вытекает, что в (1.37) $\nu=\mu$ и условия (1.35) и (1.36) вытекают из (1.33) и (1.34).

Поскольку наиболее важным для модели Неймана является именно понятие невырожденного равновесия, мы в дальнейшем только его и будем понимать под словами «равновесие в модели Неймана». Для удобства сформулируем теперь специально соответствующее определение.

Определение. Положением равновесия в модели Неймана называется тройка: (α^*, z^*, p^*), где $\alpha^*>0$, $z^*\geqslant 0$, $z^*\in R^m$, $p^*\geqslant 0$, $p^*\in R^n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\alpha^* z^* A \leqslant z^* B, \tag{1.42}$$

$$\alpha^* A p^* \geqslant B p^*, \tag{1.43}$$

$$z^* B p^* > 0. \tag{1.44}$$

Теорема 1.8 утверждает при некоторых условиях существование равновесия в этом смысле. Может существовать лишь конечное число состояний равновесия с различными коэффициентами α.

Всякая тройка (α, z, p), являющаяся состоянием равновесия в модели Неймана в смысле (1.42)—(1.44), является полным аналогом тройки (λ, x, y) для неотрицательной квадратной матрицы Q, где $xQ=\lambda x$, $Qy=\lambda y$, $x, y\geqslant 0$. Тройка (α_M, z^*, p^*), построенная при доказательстве теоремы 1.8, является аналогом тройки Фробениуса (λ_Q, x_Q, y_Q).

Рассмотрим некоторое подмножество (a_i, b_i), $i\in S$, $S\subseteq\{1, 2, ..., m\}$ множества базисных процессов модели Неймана. Исходя из выбранных процессов мы можем построить новую модель Неймана M'.

Определение. Говорят, что M' является подмоделью модели Неймана M, если $\alpha_{M'}>0$.

Другими словами, множество базисных процессов (a_i, b_i), $i\in S$, порождает подмодель, если в этом множестве всякий товар, потребляемый каким-либо процессом (a_i, b_i), $i\in S$, выпускается некоторым процессом (a_j, b_j), $j\in S$.

Модель Неймана называется неприводимой, если она не имеет собственных подмоделей.

Теорема 1.9. Если модель Неймана неприводима, то в любом состоянии равновесия (α, z, p) темп роста α равен технологическому темпу роста модели α_M.

Доказательство. Поскольку модель неприводима, то у равновесного вектора z все координаты положительны. В самом деле, если предположить, что у вектора интенсивностей z есть нулевые координаты, то множество M' базисных процессов (a_i, b_i), соответствующих положительным координатам вектора z, является собственным подмножеством всей совокупности базисных процессов. Поскольку $\alpha(z)=\alpha$ (см. задачу 2), то $\alpha_{M'} \geqslant \alpha > 0$ и, следовательно, M' — подмодель, что противоречит неприводимости модели Неймана.

Для произвольного вектора $z \in \mathbf{R}^m_+$ введем обозначение $I(z)=\{i \mid z_i=0\}$.

Лемма 1.15. Пусть (α, z, p) и $(\bar{\alpha}, \bar{z}, \bar{p})$ — состояния равновесия модели Неймана и $I(z) \supseteq I(\bar{z})$. Тогда $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$.

Доказательство. Из условия $I(z) \supseteq I(\bar{z})$ вытекает существование числа $\mu > 0$ такого, что $\mu z \leqslant \bar{z}$. Тогда $\mu z B \leqslant \bar{z} B$ или $0 < \mu z B p \leqslant \bar{z} B p$. Применяя определение равновесия для тройки $(\bar{\alpha}, \bar{z}, \bar{p})$, имеем $\bar{\alpha}\bar{z}A p \leqslant \bar{z} B p$. Умножая неравенство $\alpha A p \geqslant B p$ на вектор $\bar{\alpha}\bar{z} \geqslant 0$, получаем $\alpha\bar{\alpha}\bar{z}Ap \geqslant \bar{\alpha}\bar{z}Bp$. В то же время $\alpha\bar{z}Bp \geqslant \alpha\bar{\alpha}\bar{z}Ap$, откуда $\alpha\bar{z}Bp \geqslant \bar{\alpha}\bar{z}Bp$. Учитывая, что $\bar{z}Bp > 0$, окончательно получаем $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$.

Доказательство теоремы 1.9 теперь вытекает из того факта, что в неприводимой модели для любых двух положений равновесия (α, z, p) и $(\bar{\alpha}, \bar{z}, \bar{p})$ $I(z)=I(\bar{z})=\varnothing$.

Приведем переформулировку теоремы 1.8 в терминах траекторий.

Теорема 1.8′. Пусть матрицы $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ таковы, что $a_i \neq 0$; $b^j \neq 0$, $i, j=1, 2, \ldots, m(n)$. Тогда в динамической модели Неймана M, задаваемой матрицами A и B, существуют стационарные траектории интенсивностей и цен:

$$z_t = \alpha_M^t z, \quad p_{t+1} = 1/\alpha_M^t p.$$

§ 3. Модель Гейла

Модель Неймана, описанная выше, допускает естественное обобщение: надо лишь отказаться от предложения, что конус **C** является многогранным. В данном параграфе мы приводим соответствующую конструкцию, предложенную Д. Гейлом [19].

Как и выше, считаем, что имеется n типов продуктов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и некоторое множество **C** производственных процессов. Каждый элемент $c \in \mathbf{C}$ имеет вид $c=(x, y)$, где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор затрат продуктов G_j в количествах x_j соответственно, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — вектор выпуска; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Относительно множества **C** предполагается следующее:

1) **C** — выпуклый замкнутый конус;

2) если процесс $(0; y) \in \mathbf{C}$, то отсюда вытекает, что $y=0$;

3) всякий продукт производится хотя бы одним процессом: для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, найдется $c \in \mathbf{C}$, $c=(x, y)$, что $y_j > 0$.

Содержательный смысл этих условий ясен из § 1, 2 данной главы. По аналогии с моделью Неймана введем на конусе **C** функцию $\alpha(x, y) = y//x$ для всех $(x, y) \in \mathbf{C}$, $(x, y) \neq 0$.

Технологическим темпом роста модели Гейла назовем число $\alpha_M = \sup \alpha(x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{C}$. Используя условия 1)—3), так же как в лемме 1.12, получаем, что $0 < \alpha_M < \infty$ и что существует процесс $\bar{c}$, для которого $\alpha(\bar{c}) = \alpha_M$.

Назовем процесс (x, y) оптимальным, если $\alpha(x, y) = \alpha_M$. Множество оптимальных процессов — выпуклый замкнутый конус. Так же как в § 2, определяется характеристический процесс в **C**.

Определение. Тройка (α^*, c^*, p^*), где $\alpha^* > 0$ — число, $c^* = (x^*, y^*) \in \mathbf{C}$, $p^* \geqslant 0$ — вектор цен на продукты G_j, называется положением равновесия модели Гейла, если

$$\alpha^* x^* \leqslant y^*, \tag{1.45}$$

$$\alpha^* p^* x \geqslant p^* y \text{ для всех } (x, y) \in \mathbf{C}. \tag{1.46}$$

Ясно, что условия (1.45), (1.46) являются полными аналогами условий (1.42), (1.43) соответственно. Мы не вводим условия $(p^*, y^*)>0$, аналогичного условию (1.50) для модели Неймана, поскольку не для любого конуса **C** существует положение равновесия в таком более сильном смысле.

Теорема 1.10. Для произвольного конуса **C**, удовлетворяющего условиям 1)—3), существует положение равновесия (α^*, c^*, p^*), где $\alpha^*=\alpha_M$, а в качестве c^* можно взять характеристический процесс.

Данное утверждение не нуждается в обосновании, поскольку оно, по сути дела, было получено в ходе доказательства теоремы 1.8. Действительно, для конуса **C** выполняются леммы 1.11 и 1.12 — из их формулировок надо лишь выбросить слова «многогранный» и «замкнутый». Вместе с тем для этого конуса верны лемма 1.14 следствия 1 и 2 само доказательство теоремы 1.8, кроме утверждения, что $p>0$ (поскольку конус U в новой ситуации может оказаться незамкнутым). Однако утверждение, что $p>0$ нужно лишь для того, чтобы выполнялось строгое неравенство $(p^*, y^*)>$ >0, но это нам теперь не требуется.

Луч, определяемый вектором x^*, где x^* — вектор затрат в процессе c^*, (α^*, c^*, p^*) — положение равновесия, назовем лучом Неймана.

Последовательность векторов x_t, $t=0, 1, \ldots, T$, назовем траекторией с началом y^0, если

$$x_0 \leqslant y_0,\ (x_t, x_{t+1}) \in \mathbf{C},\ t=0, 1, \ldots, T-1,$$

и будем обозначать $\{x_t\}$.

Последовательность цен p_t, $t=0, 1, \ldots, T$, назовем траекторией цен, если $p_{t+1}y-p_tx\leqslant 0$ для всех $(x, y)\in$ $\in\mathbf{C}$, $t=0, 1, \ldots, T$, и будем обозначать $\{p_t\}$.

Ясно, что определения и понятия, введенные нами для модели Гейла, полностью аналогичны построениям в модели Неймана. Однако, как отмечено выше, в модели Гейла может не существовать невырожденного положения равновесия, которое в модели Неймана выделяет в некотором смысле исключительный процесс. В связи с этим при доказательстве теорем о модели Гейла приходится, как мы увидим, постулировать существование такого процесса, вводя это требование в условия теорем.

§ 4. Экстремальные задачи в модели Неймана—Гейла

Пусть на множестве всех траекторий $\{x_t\}$ задана функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_T)$. Тогда можно ставить вопрос об отыскании траектории, максимизирующей значение этой функции среди всех траекторий, для которых $x_0 \leqslant y^0$.

Поставленный в общем виде, естественно, этот вопрос весьма сложен. Однако при определенных предположениях относительно контура **C** и функции f Р. Раднеру удалось получить очень интересный вывод о качественном поведении оптимальных траекторий в модели Гейла, оправдывающей, в частности, наш интерес к стационарным траекториям. Результат Р. Раднера послужил началом исследований целого ряда авторов (см. [20, 21, 6, 4]) в данной области, получившей название магистральной теории. Чтобы дать представление о характере теорем о магистрали, мы изложим две из них: теоремы М. Моришимы для простейшего случая — модели Леонтьева и оригинальную теорему Р. Раднера.

Итак, рассмотрим модель Неймана, определяемую технологическими матрицами A и B. Будем предполагать, что число базисных процессов равно числу товаров, т. е. матрицы A и B — квадратные $n \times n$; более того, пусть $B = I$ и $A \geqslant 0$ — неразложима и примитивна.

Как отмечено в задаче 1 в конце главы, единственное в данном случае положение равновесия задается тройкой (α^*, z^*, p^*), где $\alpha^* = 1/\lambda_A$, $z^* = y_A$, $p^* = x_A$.

Считаем, что задан вектор начальных запасов $y^0 > 0$. В качестве целевой функции $f(x_0, x_1, \ldots, x_T)$ рассмотрим терминальную целевую функцию, т. е. функцию, значение которой зависит только от последнего аргумента — вектора x_T, $f(x_0, x_1, \ldots, x_T) = u(x_T)$. Пусть задан вектор $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$, $\hat{y} > 0$, определяющий желаемую структуру выпуска товаров в последний момент времени T. Тогда окончательно определим $u(x_T) = k_T x_T / / \hat{y}$.

Здесь k_T — так называемый дисконтирующий множитель. Понятие дисконтирования имеет содержательный экономический смысл, который мы объяснять не будем, а отошлем читателя к [22]. В математическом плане введение множителя k_T нужно для того, чтобы сравнивать не абсолютные значения функции $u(x_T)$ на различных траекториях, а относительные.

Экстремальная задача в нашей модели состоит в отыскании траектории $x_0 \leqslant y^0$, x_1, x_2, ..., x_T, максимизирующей значение функции $u(x_T)$.

В качестве k_T возьмем λ_A^T. Нетрудно увидеть и содержательный смысл этой задачи: имея ресурс y^0 в начальный момент времени, требуется обеспечить к моменту времени $T+1$ максимальный возможный запас товаров, структура которого определяется вектором $\widehat{y}$.

Напомним, что в данной модели процесс (x_t, x_{t+1}) лежит в С, если $x_{t+1}A \leqslant x_t$. Поскольку вектор выпуска в период $(t, t+1)$ совпадает с используемым в данный период вектором интенсивностей z_{t+1}, мы, вернувшись к нашим старым обозначениям, распишем экстремальную задачу в следующем виде: найти $\lambda_A^T \max \alpha$ при условиях:

$$z_1 A - y^0 \leqslant 0, \tag{1.47}$$

$$z_{t+1} A - z_t \leqslant 0, \ t = 1, 2, \ldots, T-1, \tag{1.48}$$

$$\alpha \widehat{y} - z_T \leqslant 0, \tag{1.49}$$

$$z_t \geqslant 0, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

Задача (1.47)—(1.49) представляет собой стандартную задачу линейного программирования, в которой требуется максимизировать линейную форму α в пространстве переменных

$$x = (z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^n;\ z_2^1, z_2^2, \ldots, z_2^n;\ \ldots;\ z_T^1, z_T^2, \ldots, z_T^n;\ \alpha)$$

при указанных ограничениях.

Выпишем матрицу ограничений

$$R = \begin{pmatrix} A & -I & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & A & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & A & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & \widehat{y} \end{pmatrix}$$

Здесь каждый символ $\dot{0}$, $\dot{A}$, $-\dot{I}$ обозначает квадратную $n \times n$-матрицу, кроме символов в последней строке, каждый из которых представляет собой n-мерную строку.

Вектор правой части ограничений равен $b = (y^0, 0, \ldots, 0)$. Коэффициенты линейной формы равны

$$c = (0, 0, \ldots, 0, \lambda_A^T).$$

В матричном виде задача (1.47)—(1.49) имеет вид

$$\max(c, x),$$

$$xR \leqslant b,$$

$$x \geqslant 0.$$

Выпишем задачу, двойственную к (1.47)—(1.49):

$$\min(b, y),$$

$$Ry \geqslant c,$$

$$y \geqslant 0.$$

Распишем двойственную задачу подробнее:

$$y = (p_0^1, p_0^2, \ldots, p_0^n;\ p_1^1, p_1^2, \ldots p_n^1; \ldots;\ p_T^1, p_T^2, \ldots, p_T^n),$$

$$\min(y^0, p_0),$$

$$Ap_t - p_{t+1} \geqslant 0,\ t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

$$(p_T, \hat{y}) \geqslant \lambda_A^T,$$

$$p_t \geqslant 0,\ t = 0, 1, \ldots, T.$$

Будем называть решения задач (1.47)—(1.49) и двойственной к ней оптимальными траекториями интенсивностей и цен соответственно.

Лемма 1.16. Пусть $y^0 > 0$, $\hat{y} > 0$, тогда оптимальная траектория цен $\{\tilde{p}_t\}$ удовлетворяет уравнениям $A\tilde{p}_t = \tilde{p}_{t+1}$, $(\tilde{p}_T, \hat{y}) = \lambda_A^T$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при достаточно малом $\alpha > 0$ последовательность интенсивностей

$$z_t = \alpha \hat{y} A^{T-t};\ t = 1, 2, \ldots, T,$$

является допустимой для задачи (1.47)—(1.49). Действительно, все неравенства (1.48), (1.49) для указанной последовательности обращаются просто в равенства, а для выполнения неравенства (1.47) надо лишь потребовать, чтобы $\alpha\hat{y}A^T \leqslant y^0$, что возможно при достаточно малом $\alpha > 0$ в силу предположения $y^0 > 0$. Следовательно, максимальное значение α также больше 0. Поскольку $\hat{y} > 0$, то из (1.49) следует $z_T > 0$. Воспользовавшись тем, что неразложимая матрица A не содержит нулевых столбцов, имеем $z_t \geqslant z_{t+1}A > 0$, $t = T - 1, T-2, \ldots, 1$.

По теореме двойственности для стандартной задачи линейного программирования получаем, что все ограничения в двойственной задаче для оптимальной траектории цен обращаются в равенства. Лемма доказана.

Итак, оптимальная траектория цен $\{p_t\}$ имеет вид

$$p_t = A^t p, t = 0, 1, \ldots, T, \text{ где } p = p_0.$$

Лемма 1.17. Пусть матрица A неразложима и примитивна, $p \geqslant 0$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} ((1/\lambda_A) A)^t p = kp^*, \text{ где } k = (p, z^*)/(p^*, z^*).$$

Лемма 1.17 совпадает с теоремой 1.2, утверждающей, что примитивная матрица устойчива.

Определение. Назовем конической ε-окрестностью $C(\varepsilon, p^*)$ точки p^* минимальный конус, содержащий ε-окрестность $U(\varepsilon, p^*) = \{p \mid \|p - p^*\| < \varepsilon\}$. Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму в $\mathbf{R}^n$.

Вектор p принадлежит $C(\varepsilon, p^*)$ тогда и только тогда, когда существует число $\beta > 0$ такое, что $\|\beta p - p^*\| < \varepsilon$. Лемма 1.17 утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $t(\varepsilon, p)$ такой, что при $t \geqslant t(\varepsilon, p)$

$$\|(\alpha^* A)^t p - kp^*\| < k\varepsilon$$

или

$$\left\| \frac{(\alpha^*)^t}{k} p_t - p^* \right\| < \varepsilon.$$

Следовательно, лемму 1.17 можно переформулировать с использованием понятия конической ε-окрестности следующим образом:

Если матрица A неразложима и примитивна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $t(\varepsilon, p)$, начиная с которого любой элемент последовательности $p_t = A^t p$ лежит в конической ε-окрестности точки p^*.

Уточним лемму 1.17 показав, что сходимость последовательности p_t равномерна относительно начального вектора p.

Лемма 1.18. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $t(\varepsilon)$, что при $t \geqslant t(\varepsilon)$, $p_t \in C(\varepsilon, p^*)$.

Доказательство. Пусть e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — i-тый орт в $\mathbf{R}^n$. По лемме 1.17 существуют такие числа $t(\varepsilon, e_i)$, что $A^t e_i \in C(\varepsilon, p^*)$ при $t \geqslant t(\varepsilon, e_i)$. Положим

$$t(\varepsilon) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} t(\varepsilon, e_i).$$

Тогда

$$p(t) = A^t p = p_1 A^t e_1 + p_2 A^t e_2 + \ldots + p_n A^t e_n,$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Поскольку при $t \geqslant t(\varepsilon)$ все векторы $A^t e_i$ лежат в конической ε-окрестности $C(\varepsilon, p^*)$ вектора p^*, то их неотрицательная линейная комбинация $p(t)$ также принадлежит этой конической ε-окрестности.

Ниже мы приводим теорему, относящуюся к модели Леонтьева. Ее формулировка и доказательство являются упрощениями результата Моришимы [4]. Отметим, что в [4] при доказательстве соответствующего факта допущена ошибка, да и сам факт существования магистрали в более сложной, чем у нас, ситуации, рассматриваемой Моришимой, неверен.

Теорема 1.11 (М. Моришима). Пусть $\{\tilde{z}_t\}$, $t = 0, 1, \ldots, T$ — оптимальная траектория интенсивностей. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа T_1 и T_2 такие, что при $T > T_1 + T_2$ $\tilde{z}_t \in C(\varepsilon, z^*)$ для всех t, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2$. Числа T_1 и T_2 зависят от ε, y^0, $\hat{y}$ и не зависят от T.

Отметим сразу же, что основным в содержании этой теоремы является именно тот факт, что числа T_1, T_2 не зависят от длины промежутка планирования. Позднее мы обсудим это более подробно.

Доказательство. По лемме 1.16 оптимальная траектория цен $\{\tilde{p}_t\}$ удовлетворяет условиям

$$A\tilde{p}_t = \tilde{p}_{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

$$(\tilde{p}_T, \hat{y}) = \lambda_A^T.$$

Поскольку $\lambda_A > 0$, то $\tilde{p}_T \neq 0$, следовательно, $\tilde{p}_t \neq 0$ при $t=0, 1, \ldots, T-1$. Нам важно лишь, что $\tilde{p}_0 \neq 0$. Для любой точки $p=\tilde{p}_0$ по лемме 1.18 имеем, что траектория $A^t p$ при $t \geqslant T_1 = t(\varepsilon)$ принадлежит конической ε-окрестности $C(\varepsilon, p^*)$ точки p^*. Число ε с самого начала можно взять достаточно малым, чтобы $C(\varepsilon, p^*)$ принадлежала внутренности неотрицательного ортанта $\mathbf{R}^n_+$. Следовательно, при $T_1 \leqslant t \leqslant T$, $A^t p > 0$, т. е. $\tilde{p}_t > 0$. Обращаясь вновь к теореме двойственности для стандартной задачи линейного программирования, получаем, что для решения $\{\tilde{z}_t\}$ задачи (1.47)—(1.49) выполняются условия

$$\tilde{z}_t = \tilde{z}_{t+1} A, \ t = T_1, \ T_1 + 1, \ldots, T-1,$$

$$\tilde{z}_T = \tilde{\alpha} \hat{y},$$

где $\tilde{\alpha}$ — максимальное значение целевой функции задачи. Положим $\tilde{z}_t = \tilde{\alpha} w_{T-t}$, $t=T_1, T_1+1, \ldots, T$. Тогда $\tilde{z}_{t+1} = \tilde{\alpha} w_{T-t-1}$. Обозначив $T-t$ за τ, имеем $w_\tau = w_{\tau-1} A$, $\tau = 1, 2, \ldots, T-T_1$, $w_0 = \hat{y}$. Применяя еще раз лемму 1.16, получаем, что для $\varepsilon > 0$ существует число T_2 такое, что при $\tau \geqslant T_2$ $w_\tau \in C(\varepsilon, z^*)$. Таким образом, при $T_2 \leqslant \tau \leqslant T-T_1$ $w_\tau \in C(\varepsilon, z^*)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем $\tilde{z}_t \in C(\varepsilon, z^*)$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T-T_2$. Теорема доказана.

Несколько слов о содержательном смысле этой теоремы. Опираясь на доказанную теорему, мы можем утверждать, что в чрезвычайно упрощенной модели экономики, описываемой моделью Леонтьева с примитивной матрицей A, при условии наличия в начальный момент времени положительного запаса всех товаров и при специальной целевой функции оптимальные траектории ведут себя следующим замечательным образом. Независимо от структуры первоначального запаса и от желаемой структуры выпуска в конечный момент времени Т, при условии, что данный промежуток планирования Т достаточно велик, оптимальное управление экономикой с целью максимально возможного объема выпуска в период (Т—1, Т) при заданной структуре этого выпуска оказывается таким, что в течение длительного промежутка (T_1, $T-T_2$) планирования надо заставлять все отрасли работать в пропорциях, близких к тем, которые задаются левым фробениусовым собственным вектором матрицы A, или, как мы его называем, лучом Неймана.

Другими словами, почти все время оптимальная траектория близка к оптимальной стационарной траектории.

Приведем образную интерпретацию теоремы 1.11, принадлежащую Р. Дорфману, П. А. Самуэльсону и Р. М. Солоу [23].

Допустим, что некто хочет проехать по большому городу из пункта А в пункт Б. Если пункты А и Б расположены недалеко друг от друга, то скорее всего самый быстрый путь — самый короткий. Однако если расстояние между А и Б велико, то самый быстрый путь чаще всего оказывается таким: надо из пункта А выехать на одну из больших городских магистралей, где средняя скорость движения достаточно велика, не смущаясь тем, что мы, возможно, движемся в сторону от цели Б, по этой магистрали приблизиться, насколько возможно, к пункту Б и затем только с нее свернуть.

С легкой руки Дорфмана, Самуэльсона и Солоу результаты типа теоремы 1.11 стали называть теоремами о магистрали.

Теорема 1.11 является представителем «сильных» теорем о магистрали — в ней указывается расположение «плохих» промежутков планирования — в начале и конце планового периода. Существуют «слабые» теоремы о магистрали — они утверждают лишь, что число «плохих» промежутков невелико, не уточняя их местоположение.

Первая из магистральных теорем, доказанная Р. Раднером, была именно слабой теоремой о магистрали. Ее мы изложим несколько позже, сейчас же приведем пример для модели Леонтьева. Вследствие того, что модель Леонтьева очень проста, здесь нетрудно непосредственно указать одну из оптимальных траекторий.

Действительно, умножив неравенство (1.55) на A, имеем

$$a\hat{y}A \leqslant z_T A \leqslant z_{T-1}.$$

Пусть уже доказано, что

$$a\hat{y}A^t \leqslant z_{T-t}.$$

Умножим данное неравенство на A и используя (1.54), получаем

$$\alpha\widehat{y}A^{t+1} \leqslant z_{T-t}A \leqslant z_{T-(t+1)}.$$

Поэтому $\alpha\widehat{y}A^T \leqslant y^0$. Таким образом, для любого плана $(z_1, z_2, ..., z_T, \alpha)$ задачи (1.47)—(1.49) имеем, что $\alpha \leqslant \widetilde{\alpha}$, где

$$\widetilde{\alpha} = \max_{\alpha\widehat{y}A^T \leqslant y^0} \alpha, \text{ т. е. } \widetilde{\alpha} = y^0 // \widehat{y}A^T.$$

Построим теперь план $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, ..., \widetilde{z}_T, \widetilde{\alpha})$, из чего будет следовать, что траектория $\{\widetilde{z}_t\}$ оптимальна. Положим $\widetilde{z}_t = \widetilde{\alpha}\widehat{y}A^{T-t}$. При $t=1$ имеем $\widetilde{z}_1 = \widetilde{\alpha}\widehat{y}A^{T-1}$ и поэтому $\widetilde{z}_1 A \leqslant y^0$. Далее, $\widetilde{z}_{t+1} = \widetilde{\alpha}\widehat{y}A^{T-t-1}$, откуда $\widetilde{z}_{t+1}A = \widetilde{z}_t$. Кроме того, $\widetilde{z}_T = \widetilde{\alpha}\widehat{y}$. Тем самым мы показали, что план $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, ..., \widetilde{z}_T, \widetilde{\alpha})$ удовлетворяет ограничениям (1.47)—(1.49) задачи (П), причем $\widetilde{\alpha}$ — максимально возможное значение линейной формы.

Пример.
$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 \end{pmatrix}$. Поскольку $A > 0$, то A — примитивна. Собственные числа матрицы A суть

$$\lambda_1 = \lambda_A = 5/8; \ \lambda_2 = 3/8, \ z^* = (1, 2).$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A^nB = \begin{pmatrix} (5/8)^n & 0 \\ 0 & (3/8)^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = (5/8)^n \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} + (3/8)^n \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\widehat{y} = (1/2, 1/2), \quad y^0 = (2, 1),$$

то

$$\widehat{y}A^T = (5/8)^T (3/8, 3/4) + (3/8)^T (1/8, -1/4).$$

Число $\tilde{\alpha}$ должно быть равно меньшему из отношений

$$\alpha_1 = \frac{2}{\left(\frac{5}{8}\right)^T \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^T \frac{1}{8}},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\left(\frac{5}{8}\right)^T \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8}\right)^T \frac{1}{4}}.$$

Легко видеть, что при любом $T > 0$ $\alpha_2 < \alpha_1$, поэтому $\tilde{\alpha} = \alpha_2$.

Вычислим оптимальную траекторию:

$$\tilde{z}_t = \tilde{\alpha} \hat{y} A^{T-t} = \tilde{\alpha} \left(\left(\frac{5}{8}\right)^{T-t} \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^{T-t} \frac{1}{8}; \right.$$

$$\left. \left(\frac{5}{8}\right)^{T-t} \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8}\right)^{T-t} \frac{1}{4} \right).$$

Таким образом,

$$(\tilde{z}_t)_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5}\right)^t \frac{3 + \left(\frac{3}{5}\right)^{T-t}}{3 - \left(\frac{3}{5}\right)^T},$$

$$(\tilde{z}_t)_2 = \left(\frac{8}{5}\right)^t \frac{3 - \left(\frac{3}{5}\right)^{T-t}}{3 - \left(\frac{3}{5}\right)^T}.$$

Отсюда

$$\frac{(\tilde{z}_t)_2}{(\tilde{z}_t)_1} = 2 - \frac{4 \left(\frac{3}{5}\right)^{T-t}}{3 + \left(\frac{3}{5}\right)^{T-t}}.$$

Отметим, что луч Неймана для нашей матрицы A характеризуется отношением $z_2^*/z_1^* = 2$. Из выражения для $(\tilde{z}_t)_2/(\tilde{z}_t)_1$ видно, что при больших T оптимальная траектория интенсивностей начинается весьма близко от луча Неймана, и весь промежуток планирования находится очень близко от него, медленно удаляясь. Самое большое отклонение имеет место в последнем периоде, где $(\tilde{z}_t)_2/(\tilde{z}_t)_1 = 1$.

Магистральная теорема Раднера относится к модели Гейла. Пусть на множестве $\mathbf{R}^n_+$ — всевозможных неотрицательных векторах-наборах товаров — задана функция $u(x)$, называемая функцией полезности.

Пусть T — длина промежутка планирования. Тогда целевой функцией для модели Гейла выберем функцию $u(x_T)$, где x_T — выпуск в последний плановый период $(T-1, T)$. Траектория $\{\tilde{x}_t\}$ называется оптимальной, если $u(\tilde{x}_T) \geqslant u(x_T)$ для любой траектории $\{x_t\}$.

Наложим на технологический конус $\mathbf{C}$ следующие ограничения:

1. Конус $\mathbf{C}$ содержит элемент вида $\bar{c}=(\bar{x}, \alpha\bar{x})$, где $\bar{x}\geqslant 0$, $\bar{x}\neq 0$, $\alpha>0$.
2. Существует вектор цен $p\geqslant 0$, такой, что для всех $c=(x, y)\in\mathbf{C}$, не пропорциональных $\bar{c}$, имеет место неравенство $(p, y)<\alpha(p, x)$.
3. Для любого вектора $x\geqslant 0$ существует число $L>0$ такое, что $(x, L\bar{x})\in\mathbf{C}$.

Ограничения на функцию $u(x)$:

4. $u(x)\geqslant 0$, $u(x)$ — непрерывна.
5. $u(\lambda x)=\lambda u(x)$ для всех $x\in\mathbf{R}^n_+$, $\lambda>0$.

Условия согласованности на конус $\mathbf{C}$ и функцию u:

6. $u(\bar{x})>0$.
7. Существует число $k>0$ такое, что $u(x)\leqslant k(p,x)$, где p — вектор цен, фигурирующий в условии 2.

Введем в $\mathbf{R}^n$ квазиметрику: расстоянием между векторами x и y назовем число $\rho(x, y)=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$, где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда векторы x и y лежат на одном луче.

Пусть $Q(\varepsilon, T, \{x_t\})$ означает число номеров t траектории $\{x_t\}$, для которых $\rho(x_t, \bar{x})>\varepsilon$.

Теорема 1.12 (Р. Раднер). Пусть конус $\mathbf{C}$ и функция u удовлетворяют условиям 1—7. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $S(\varepsilon)$, такое, что $Q(\varepsilon, T, \{\tilde{x}_t\})<S(\varepsilon)$. Число $S(\varepsilon)$ не зависит от длины планового периода T и оптимальной последовательности $\{\tilde{x}_t\}$.

Лемма 1.19. Пусть $\mathbf{C}_\varepsilon=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in\mathbf{C}, \rho(x, \bar{x})\geqslant$

$\geqslant \varepsilon\}$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что $(p, y)\leqslant(\alpha-\delta)(p, x)$ для всех $(x, y)\leqslant C_\varepsilon$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда найдется последовательность $(x_k, y_k)\in C_\varepsilon$ и последовательность чисел $\delta_k\to 0$ такие, что

$$(p, y_k)>(\alpha-\delta_k)(p, x_k).$$

В таком случае $x_k\neq 0$, $k=1, 2, \ldots$, и, воспользовавшись очевидным фактом, что C_ε — конус, можно считать, что $\|x_k\|=1$. Из того, что процесс $(0, y)\notin C$ при $y\neq 0$, легко получить, как мы делали это раньше, что последовательность (x_k, y_k), $k=1, 2, \ldots$, ограничена и поэтому ее можно считать сходящейся. Пусть (x', y') — предельная точка нашей последовательности. Конус C_ε замкнут, следовательно, $(x', y')\in C_\varepsilon$

По построению последовательности (x_k, y_k) ее предел (x', y') удовлетворяет неравенству $(p, y')\geqslant\alpha(p, x')$. Из условия 2 вытекает, что $(x', y')=\lambda(\bar{x}, \alpha\bar{x})$. В этом случае, однако, $\rho(x', \bar{x})=0$, что противоречит включению $(x', y')\in C$.

Доказательство теоремы 1.12. Построим вспомогательную последовательность $\{x_t\}$ следующим образом: $x_0=y^0$, $x_1=L\bar{x}$, $x_2=\alpha L\bar{x}$, ..., $x_t=\alpha^{t-1}L\bar{x}$, $t=3, 4, \ldots, \ldots, T$. Здесь L — такое число, что процесс $(y^0, L\bar{x})$ принадлежит конусу C. Существование этого числа утверждается условием 3. Очевидно, что $(x_t, x_{t+1})\in C$. Заметим, что начиная со второго шага наша последовательность стационарна. Значение целевой функции для данной траектории равно

$$u(x_T)=\alpha^{T-1}Lu(\bar{x})>0.$$

Здесь мы воспользовались условиями 5 и 6. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно и $\{\tilde{x}_t\}$ — оптимальная траектория. Рассмотрим конус C_ε и возьмем число $\delta>0$, существование которого утверждается леммой 1.19. Если теперь

$$(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})\in C_\varepsilon,$$

то

$$(p, \tilde{x}_{t+1})\leqslant(\alpha-\delta)(p, \tilde{x}_t). \tag{1.50}$$

Вместе с тем

$$(p, \tilde{x}_{t+1})\leqslant\alpha(p, \tilde{x}_t) \tag{1.51}$$

для всех номеров $t=0, 1, \dots, T-1$. Допустим, что Q — число пар $(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})$, для которых $\rho(\tilde{x}_t, \bar{x}) \geqslant \varepsilon$. Тогда из неравенств (1.50) и (1.51) легко получить, что

$$(p, \tilde{x}_T) \leqslant (\alpha - \delta)^Q \alpha^{T-Q} (p, y^0).$$

Используя условие 7, получаем

$$u(\tilde{x}_T) \leqslant k(\alpha - \delta)^Q \alpha^{T-Q} (p, y^0).$$

Поделив обе части этого неравенства на $u(x_T)$ и учитывая, что траектория $\{\tilde{x}_t\}$ оптимальна, имеем

$$1 \leqslant \frac{u(\tilde{x}_T)}{u(x_T)} \leqslant \frac{k(\alpha - \delta)^Q \alpha^{T-Q}(p, y^0)}{L\alpha^{T-1} u(\bar{x})}.$$

Обозначив $d = \frac{k\alpha(p, y^0)}{Lu(\bar{x})}$ и сократив на α^T, получаем $d\left(\frac{\alpha - \delta}{\alpha}\right)^Q \geqslant 1$.

Заметим, что d есть константа, зависящая только от самого конуса $\mathbf{C}$ и начальных запасов y^0, но не от T. Находя из последнего неравенства оценку для Q

$$Q \leqslant -\frac{\ln d}{\ln(1 - \delta/\alpha)},$$

убеждаемся в справедливости теоремы. В качестве $S(\varepsilon)$ можно взять число $-\frac{\ln d}{\ln(1-\delta/\alpha)}$. Зависимость от ε выражается в присутствии числа δ.

Легко видеть, что тройка $(\alpha, \bar{c}, p)$, $\bar{c} = (\bar{x}, \alpha\bar{x})$, фигурирующая в условиях теоремы 1.12, является положением равновесия модели Гейла, определяемой данным конусом $\mathbf{C}$.

За последнее время получено много различных результатов, идейно близких теоремам 1.11 и 1.12. В частности, доказаны соответствующие факты для более общей модели Неймана при подходящих ограничениях на технологию (A, B). Изложение некоторых из них, а также подробную библиографию по этому вопросу можно найти в книге Ю. Н. Черемных [5].

Появился также интерес к моделям типа модели Неймана — Гейла с технологией, зависящей от времени. В простых случаях, например, в модели Леонтьева с технологией, задаваемой примитивными матрицами A_t, $t=1, 2, \ldots, t$, с общим лучом Неймана z^*, все построения и утверждения ничем не отличаются от случая постоянной матрицы $A \equiv A_t$.

§ 5. Динамические модели с переменной технологией

Формальное описание модели типа Неймана—Гейла с переменной технологией не вызывает затруднений. Однако при изучении таких моделей возникают различного рода сложности, связанные, например, с тем, что здесь, вообще говоря, нет явного аналога луча Неймана. Вместе с тем подобные модели интересны постольку, поскольку, с одной стороны, они несомненно ближе к реальной экономике, с другой — в них возникают принципиально новые в математическом плане задачи.

Мы не имеем возможности остановиться на всех попытках строить для моделей с переменной технологией теории, аналогичные той, что изложена в § 4. Отметим лишь, что для простейшего случая максимально агрегированной модели — однопродуктовой — подобные вопросы рассматривались на языке теории производственных функций сравнительно давно.

В данной главе обратим внимание на несколько иной аспект теории экономических моделей с переменной технологией. Даже если предположить, что технология меняется экзогенно, независимо от наших действий и желаний, то возникает ситуация, которой не могло быть при постоянной технологии. Именно: планирующий, управляющий орган может не знать состояние технологии в будущем. Сформулируем точнее одну из проблем, возникающих в данной ситуации.

Если бы мы знали технологию заранее на весь интересующий нас промежуток планирования, то мы смогли бы управлять производством оптимальным образом, максимизируя значение нашего целевого функционала. Допустим теперь, что в каждый момент времени мы информированы о состоянии технологии лишь на ограниченное число будущих периодов планирования. Спрашивается, поставленные таким образом в условия неполной информации, сможем ли мы выбрать (точнее, существует ли) способ планирования, который позволил бы нам не слишком много потерять по сравнению с оптимальным вариантом? Такая постановка вопроса имеется в работах Е. Лоша [16, 17].

Для описания интересующей нас модели требуется задать:

множество S элементов $s \in S$, называемых начальными состояниями;

множество Q_0 элементов $q_t \in Q_0$, называемых динамическими параметрами;

множество Q конечных последовательностей (не обязательно всех) $q = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $q_t \in Q_0$, $t = 1, 2, \ldots$;

множество $\mathbf{Z}_0$ элементов $z_t \in \mathbf{Z}_0$, называемых управлениями;

множество $\mathbf{Z}$ конечных последовательностей $z = \{z_1, z_2, \ldots\}$, $z_t \in \mathbf{Z}_0$, называемых планами;

функцию $f(z, q, s)$, где $z \in \mathbf{Z}$, $q \in Q$, $s \in S$.

Функция f предполагается ограниченной сверху при фиксированных q, s, но ей разрешается принимать значение $-\infty$ (для недопустимых управлений).

Основная задача состоит в максимизации функции $f(z, q, s)$ на множестве $\mathbf{Z}$ при заданных $q \in Q$, $s \in S$.

Обозначим $v(q, s) = \sup\limits_{z \in \mathbf{Z}} f(z, q, s)$.

Для пояснения возможных интерпретаций введенных множеств и функций рассмотрим модель Леонтьева с переменной технологией.

Пусть множество S совпадает с внутренностью неотрицательного октанта $\mathbf{R}_+^n$ n-мерного евклидова пространства (пространства товаров). Всякий элемент множества Q_0 представляет собой неразложимую, примитивную неотрицательную матрицу A, либо пару $(A, \widehat{y})$, $\widehat{y} \in \mathbf{R}_+^n$. В качестве множества Q возьмем множество всех последовательностей вида

$$q = (A_1, A_2, \ldots, A_T, \widehat{y}), \; A_t \in Q_0.$$

Каждый элемент $z_t \in \mathbf{Z}_0$ в нашем случае будет представлять собой n-мерный вектор интенсивностей (т. е. $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{R}_+$).

Определим функцию $f(z, q, s)$ следующим образом: она определена только в том случае, если последовательности z и q имеют одинаковую длину, скажем T; если при некотором t, $1 \leqslant t \leqslant T$, нарушается условие $z_{t+1}A_{t+1} \leqslant z_t$, либо нарушается условие $z_1 A_1 \leqslant s$, то полагаем $f(z, q, s) = -\infty$;

в противном случае положим

$$f(z, q, s) = \lambda_{A_1} \lambda_{A_2} \ldots \lambda_{A_T} z_T // \widehat{y}.$$

Здесь мы дисконтируем величину $z_T \| \widehat{y}$ множителем $\lambda_{A_1} \lambda_{A_2} \ldots \lambda_{A_T}$ подобно тому, как мы это делали в случае модели Леонтьева с постоянной технологией (§ 4).

Запишем задачу максимизации функции f в форме стандартной задачи линейного программирования

$$\begin{gathered} \max \lambda_{A_1} \lambda_{A_2} \ldots \lambda_{A_T} \alpha, \\ z_1 A_1 \leqslant s, \\ z_{t+1} A_{t+1} \leqslant z_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1, \\ \alpha \widehat{y} \leqslant z_T, \\ z_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \end{gathered} \tag{1.52}$$

Для данной задачи нетрудно указать оптимальное решение аналогично тому, как это делалось для модели с постоянной технологией в § 4. В самом деле, для любого плана задачи (1.52), как легко видеть, имеет место неравенство $\alpha \widehat{y} A_T A_{T-1} \ldots A_1 \leqslant s$. Следовательно, любое достижимое значение α удовлетворяет неравенству $\alpha < s // \widehat{y} A_T \ldots A_1 = \widetilde{\alpha}$. Укажем план, на котором достигается указанная верхняя граница $\widetilde{\alpha}$, из чего будет следовать его оптимальность.

Пусть

$$\begin{gathered} \bar{z}_t = \widetilde{\alpha} \widehat{y} A_T A_{T-1} \ldots A_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1, \\ \bar{z}_T = \widetilde{\alpha} \widehat{y}, \end{gathered} \tag{1.53}$$

где

$$\widetilde{\alpha} = s // \widehat{y} A_T A_{T-1} \ldots A_2 A_1.$$

Простой подстановкой в (1.52) убеждаемся, что управление (1.53) допустимо. По построению $z_T // \widehat{y} = \widetilde{\alpha}$. Если положить $\bar{A}_t = \frac{1}{\lambda_{A_t}} A_t$, то максимальное значение $v(q, s)$ функции $f(z, q, s)$ равно

$$v(q, s) = s/|\widehat{y}\bar{A}_T\bar{A}_{T-1} \dots \bar{A}_1. \qquad (1.54)$$

Вернемся вновь к общей модели экономического планирования. Определяя функцию $v(q, s)$ и вычисляя для конкретного примера ее значение (1.54), а также указывая оптимальное управление (1.53) для данного примера, мы считали, что динамические параметры $q = (A_1, A_2, \dots, A_T, \widehat{y})$ известны с самого начала планового периода. В самом деле, при построении оптимального управления $\bar{z}_t$ по формулам (1.53) нам в первый же момент времени $t=1$ необходимо знать и вектор $\widehat{y}$ и все матрицы $A_1, \dots, A_T$.

Допустим теперь, что в момент времени t нам известна не вся последовательность динамических параметров, а лишь ее часть $(q_1, q_2, \dots, q_t, q_{t+1}, \dots, q_{t+h})$, где $h \geqslant 0$ — некоторое натуральное число. В таком случае нельзя ставить вопрос об отыскании оптимального управления. Естественно пытаться найти достаточно хорошее «гибкое» управление, которое в любой момент можно было бы скорректировать с учетом новой информации. Существование такого «гибкого» управления — это есть внутреннее свойство самой задачи, определяемой множествами $\mathbf{Z}_0$, Q_0, S, функцией f, и зависящее от величины h.

С целью сформулировать формально свойство задачи обладать «гибкими» управлениями введем некоторые новые понятия и обозначения. Для произвольной последовательности $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ через $\xi|t$ обозначим конечную последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$. Через $\overline{Q}$ обозначим границу множества Q, т. е. множество всех таких бесконечных последовательностей $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots)$, что $\bar{q}|t \in Q$ при всех $t = 1, 2, \dots$. В нашем примере с моделью Леонтьева множество $\overline{Q}$ представляет собой множество всех бесконечных последовательностей примитивных матриц. Аналогично определим $\overline{\mathbf{Z}}$.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$, $q \in \overline{Q}$, $s \in S$. Натуральное число $h \geqslant 0$ называется ε-горизонтом для пары (q, s), если существует последовательность $\bar{z} \in \overline{\mathbf{Z}}$ («гибкое» управление), обладающее тем свойством, что для любого t и любой последовательности динамических параметров $\tilde{q}\in Q$ такой, что $\tilde{q}|t+h=q|t+h$, существует управление $\tilde{z}\in\mathbf{Z}$ такое, что $\tilde{z}|t=\bar{z}|t$ и $v(\tilde{q}, s)-f(\tilde{z}, \tilde{q}, s)<\varepsilon$.

Определение. Если для любого $\varepsilon>0$ пара (q, s) $q\in\bar{Q}$, $s\in S$ обладает ε-горизонтом $h(\varepsilon)$, то говорят, что пара (q, s) обладает свойством аппроксимативного горизонта.

Обсудим только что введенное понятие ε-горизонта. Приведенное определение можно проиллюстрировать следующими рассуждениями. Допустим, что для пары (q, s), $q\in\bar{Q}$, $s\in S$ существует «гибкое» управление. Это означает, что если имеется реальный процесс, который до момента t развивался так же, как последовательность $q: q|t=\tilde{q}|t$, и при этом мы знаем развитие нашей технологии на h шагов вперед, то можно утверждать нечто большее, именно, что $q|t+h=\tilde{q}|t+h$. Допустим, что до момента t мы применяли «гибкое» управление $\bar{z}$. Если в момент времени t стало известно, какой процесс $\tilde{q}$ происходит на самом деле, т. е. стала известна и длина промежутка планирования T и вся последовательность динамических параметров $\tilde{q}_\tau$, $\tau=t, t+1, \ldots, T$, то мы сможем выбрать управление $\tilde{z}$ (естественно, $\tilde{z}|t=\bar{z}|t$, — мы не можем менять прошлое) таким, чтобы отклонение от максимального значения функционала f было не более, чем ε.

Отметим особо, что некоторые параметры и самого функционала f нам могут быть неизвестны — в примере с моделью Леонтьева это $\hat{y}$.

Свойство аппроксимативного горизонта, нам кажется, является в некотором смысле минимальным требованием к «хорошей», управляемой экономике.

Мы ничего не говорим о возможности отыскания «гибкого» плана, нас в настоящий момент интересует лишь вопрос его существования.

Рассмотрим вначале самый простой случай задачи динамического планирования экономики, описываемый моделью Леонтьева. Именно, пусть множество Q_0 состоит из примитивных матриц, обладающих общим левым собственным вектором Фробениуса z^*. Основное предположение будет состоять в том, что и вектор $\widehat{y}$, определяющий функционал, также совпадает с z^*. Покажем, что в этом случае любая пара (q, s), $q \in \overline{Q}$, $s \in S$ обладает 0-горизонтом h, при этом $h=0$. В самом деле, как мы уже видели, формулы (1.53) задают оптимальное управление для произвольной задачи в данной модели. Учитывая, что $\widehat{y} = z^*$, $z^* A_t = \lambda_{A_t} z^*$, получаем

$$\bar{z}_t = \lambda_{A_1}^{-1} \ldots \lambda_{A_t}^{-1} z^* s // z^*. \qquad (1.55)$$

Из (1.55) видим, что оптимальное управление в нашем частном случае зависит только от динамических параметров, индексы которых не превосходят t, что и доказывает утверждение.

Менее тривиален случай, когда $\widehat{y}$ — произвольный положительный вектор. Для получения соответствующего результата, однако, придется наложить дополнительные условия на матрицы из множества Q_0. Будем считать, что множество Q_0 удовлетворяет следующим требованиям:

1. Все матрицы из Q_0 примитивны.

2. Все матрицы из Q_0 имеют общий левый собственный вектор Фробениуса z^*.

3. Все матрицы из Q_0 имеют общий правый собственный вектор Фробениуса p^*.

Назовем вектор $x \geqslant 0$ нормированным, если $(x, p^*) = 1$. Будем считать вектор z^*, $\widehat{y}$ нормированным.

4. Если $A_1, A_2, \ldots$ — произвольная последовательность матриц из множества Q_0, $z \geqslant 0$ — произвольный нормированный вектор, то последовательность $z\bar{A}_n\bar{A}_{n-1}\ldots\bar{A}_1$ сходится при $n \longrightarrow \infty$ к вектору z^* равномерно на множестве всех нормированных векторов.

Выполнение условия 4 можно добиться, потребовав, например, чтобы все матрицы A из множества Q_0 действовали на подпространстве $\mathscr{L} = \{z \mid (z, p^*) = 0\}$ как операторы сжатия $(\|zA\| \leqslant \gamma_A \|z\|)$, коэффициенты сжатия которых в совокупности отделены от единицы: $\gamma_A \leqslant \gamma_0 < 1$.

Теорема 1.13. Произвольная пара (q, s), $q \in \overline{Q}$, $s \in S$, обладает ε-горизонтом $h(\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $q = (A_1, A_2, \ldots)$. Возьмем в качестве «гибкого» управления последовательность $\bar{z}_t$, определенную равенством (1.55). Пусть $\tilde{q} \in Q$ — произвольная последовательность, совпадающая на первых $t+h$ шагах с последовательностью q:

$$\tilde{q} = (A_1, A_2, \ldots, A_t, \ldots, A_{t+h}, B_1, \ldots, B_r, \hat{y}).$$

Нам надо указать управление $\tilde{z}$, совпадающее на первых t шагах с $\bar{z}$ и такое, что $v(q, s) - f(\tilde{z}, \tilde{q}, s) < \varepsilon$. Положим

$$\tilde{z}_\tau = \bar{z}_\tau = \lambda_{\bar{A}_1}^{-1} \ldots \lambda_{\bar{A}_\tau}^{-1} z^* s // z^*, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t,$$

а остальные члены последовательности $\tilde{z}$ выберем таким образом, чтобы управление $z' = (\tilde{z}_{t+1}, \ldots, \tilde{z}_{t+h}, \ldots, \tilde{z}_{t+h+r})$ было оптимальным для аналогичной задачи с последовательностью динамических параметров $q' = (A_{t+1}, \ldots, A_{t+h}, B_1, \ldots, B_r, \hat{y})$ и начальным параметром

$$\bar{z}_t = \lambda_{\bar{A}_1}^{-1} \ldots \lambda_{\bar{A}_t}^{-1} z^* s // z^*.$$

Другими словами, до момента t мы управляли по формулам (1.55), а затем, получив необходимую информацию, стали управлять оптимально. Вычислим $f(\tilde{z}, \tilde{q}, s)$. По определению

$$f(\tilde{z}, \tilde{q}, s) = \lambda_{A_1} \ldots \lambda_{A_t} \ldots \lambda_{A_{t+h}} \lambda_{B_1} \ldots \lambda_{B_r} \tilde{z}_T // \hat{y}.$$

По построению последовательности $\tilde{z}$ вектор $\tilde{z}_T$ есть выпуск в последний момент времени для задачи, задаваемой параметрами $(z', q', \bar{z}_t)$, решаемой оптимальным образом. По формуле (1.54) имеем

$$\lambda_{A_{t+1}} \ldots \lambda_{A_{t+h}} \lambda_{B_1} \ldots \lambda_{B_r} \tilde{z}_T // \hat{y} =$$
$$= v(q', \bar{z}_t) = \bar{z}_t // \hat{y} \bar{B}_r \ldots \bar{B}_1 \bar{A}_{t+h} \ldots \bar{A}_{t+1}.$$

Отсюда имеем

$$f(\tilde{z}, \tilde{q}, s) = \lambda_{A_1} \lambda_{A_2} \ldots \lambda_{A_t} \bar{z}_t // \hat{y} \bar{B}_r \ldots \bar{B}_1 \bar{A}_{t+h} \ldots \bar{A}_{t+1}.$$

Подставляя в правую часть выражение (1.61), для $\overline{z_t}$ получаем

$$f(\tilde{z}, \tilde{q}, s) = s//z^* \cdot z^*//\hat{y}\overline{B}_r \ldots \overline{B}_1 \overline{A}_{t+h} \ldots \overline{A}_{t+1}.$$

С другой стороны,

$$v(\tilde{q}, s) = s//\hat{y}\overline{B}_r \ldots \overline{B}_1 \overline{A}_{t+h} \ldots \overline{A}_{t+1} \ldots \overline{A}_1.$$

Поскольку вектор $\hat{y}\overline{B}_r \ldots \overline{B}_1$ нормирован, то обе последовательности

$$\hat{y}\overline{B}_r \ldots \overline{B}_1 \overline{A}_{t+h} \ldots \overline{A}_{t+1} \text{ и } \hat{y}\overline{B}_r \ldots \overline{B}_1 \overline{A}_{t+h} \ldots \overline{A}_{t+1} \ldots \overline{A}_1$$

стремятся к z^* при $h \longrightarrow \infty$. Следовательно, величины $f(\tilde{z}, \tilde{q}, s)$ и $v(\tilde{q}, s)$ стремятся к общему пределу при $h \longrightarrow \infty$, а их разность — к нулю. Для достаточно большого h имеем $v(\tilde{q}, s) - f(\tilde{z}, \tilde{q}, s) < \varepsilon$. Теорема доказана.

Отметим, что полученные результаты относительно наличия свойства аппроксимативного горизонта у рассматриваемой модели леонтьевского типа тесно связаны, конечно, с «магистральным» свойством этой модели.

На этом мы заканчиваем первую часть книги, посвященную линейным экономическим моделям. Несмотря на очевидные недостатки предположения о линейности, изучение таких моделей является необходимым этапом на пути к более сложным и более адекватным реальности построениям. Так, первую и иногда самую важную информацию о поведении функции можно получить, изучая линейную часть ее ряда Тэйлора.

В настоящий момент автору неизвестны нелинейные многосекторные модели, для которых были бы получены результаты, хоть в какой-то мере столь же содержательные, как, например, теоремы о магистрали для модели Неймана — Леонтьева — Гейла с явным указанием луча Неймана и т. д. Подобная ситуация объясняется, конечно, тем, что нелинейный случай на порядок сложнее линейного. Так, для итераций нелинейных отображений не доказано ни одного факта типа теоремы об эргодическом свойстве примитивных матриц.

Совсем по-иному обстоит дело в случае сильно агрегированных моделей — односекторых, функционирование которых описывается однозначной функцией (производственной). Здесь нелинейный случай, естественно, является основным и достаточно хорошо исследован, как мы увидим в третьей части книги.

Простота и общность модели Неймана в классе линейных моделей привлекали и продолжают привлекать внимание ученых. На языке этой конструкции построены модели производства, включающие образование и труд и различающие возможные типы труда, исследованы вопросы кооперирования двух экономических систем и соревнование таких систем [24, 25], и другое.

Задачи

1. Доказать, что в модели Неймана — Леонтьева, задаваемой матрицами (A, I), где A — неотрицательная квадратная неразложимая матрица, существует единственное состояние равновесия

$$z^* = y_A, \quad p^* = x_A, \quad \alpha^* = \lambda_A^{-1}.$$

2. Показать, что если (α, z, p) — положение равновесия в модели Неймана, то $\alpha = \alpha(z) = zB//zA$.

3. Для модели Неймана

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

найти темп роста α_M и луч Неймана.

4. Пусть $\mathbf{C}$ — модель Гейла. Докажите, что множество $A_x = \{y \mid (x, y) \in \mathbf{C}\}$, если оно не пусто, является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством для всех $x \geqslant 0$.

5. Пусть $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ — две модели Гейла в одном пространстве товаров $\mathbf{R}^n_+$. Будет ли множество $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$ моделью Гейла? Если да, то как изменится технологический темп роста модели $\mathbf{C}$ по сравнению с технологическими темпами роста моделей $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$?

6. Приведите пример замкнутого конуса, проекция которого на какое-нибудь подпространство незамкнута.

7. Показать, что множество

$$\mathbf{C}=\{(x_1, x_2;\ y_1, y_2) \mid 2y_1^2+y_2^2 \leqslant 4x_1^2+6x_2^2,\ x_i, y_i \geqslant 0\}$$

является моделью Гейла и найти ее технологический темп роста и луч Неймана.

Следующие четыре задачи дают доказательство того интуитивно очевидного факта, что многогранный конус замкнут.

8. Пусть $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i=1, 2, \ldots, k$ — линейно-зависимые векторы и вектор x является их неотрицательной линейной комбинацией. Доказать, что вектор x можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации собственного подмножества системы векторов $\{a_i, i=1, 2, \ldots, k\}$.

Следствие. Вектор x можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации некоторого линейно-независимого подмножества системы векторов $\{a_i, i=1, 2, \ldots, k\}$.

9. Если $x=\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$, векторы a_i, $i=1, 2, \ldots, k$, — линейно-независимы, то существует константа K, зависящая только от векторов a_i, $i=1, 2, \ldots, k$, такая, что $\|\lambda\| \leqslant K\|x\|$, где $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$.
Указание. Включить векторы a_i, $i=1, 2, \ldots, k$, в ортонормальный базис пространства $\mathbf{R}^n$, ввести в нем согласованную норму $\|\cdot\|_a$ и показать, что $\|x\|_a=\|\lambda\|_E$, где $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма. Затем воспользоваться эквивалентностью нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_E$ в $\mathbf{R}^n$.

10. Пусть $\mathbf{C}=\left\{x \mid x=\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0\right\}$ — многогранный конус в $\mathbf{R}^n$. Показать, что если $x \in \mathbf{C}$, то существует такое представление

$$x=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, k,$$

что $\|\lambda\| \leqslant K\|x\|$, где K зависит только от векторов a_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Указание. Воспользоваться задачами 8 и 9.

11. Доказать, что многогранный конус замкнут. Указание. Воспользоваться задачей 10.

Часть II

ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

Математическое введение. Свойства многозначных отображений

Предполагается, что X, Y — компактные, выпуклые подмножества в $\mathbf{R}^n$; φ — многозначное отображение $\varphi: X \longrightarrow Y$, ставящее в соответствие каждой точке x множества X некоторое подмножество $\varphi(x) \subseteq Y$.

Определение. Отображение $\varphi: X \longrightarrow Y$ называется полунепрерывным сверху, если из того, что $x_n \longrightarrow x_0$, $x_n \in X$, $y_n \longrightarrow y_0$, $y_n \in \varphi(x_n)$, следует, что $y_0 \in \varphi(x_0)$.

Чтобы пояснить смысл введения понятия полунепрерывности сверху, отметим, во-первых, что для однозначной функции оно означает обычную непрерывность. Во-вторых, покажем, что это понятие тесно связано с вопросом максимизации функций нескольких переменных.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется вогнутой, если

$$f(\alpha x + \beta y) \geqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$$

при любых $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ и $x, y \in X$.

Лемма В.1. Пусть непрерывная функция $u(x, y)$ определена на множестве $X \times Y$, где X, Y — выпуклые компакты, $u(x, y)$ — вогнута по y. Тогда отображение

$$\varphi(x) = \{y \mid y \in Y,\ u(x, y) = \max_{y' \in Y} u(x, y')\}$$

полунепрерывно сверху, а множества $\varphi(x)$ непусты, выпуклы и замкнуты.

Доказательство. Непустота и замкнутость $\varphi(x)$ очевидна из основных фактов математического анализа, выпуклость следует из вогнутости $u(x, y)$. Проверим полунепрерывность сверху. Пусть $x_n \longrightarrow x_0$,

$y_n \to y_0$, $y_n \in \varphi(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$. Надо показать, что $y_0 \in \varphi(x_0)$. Последнее включение эквивалентно неравенству $u(x_0, y) \leqslant u(x_0, y_0)$ для всех $y \in Y$, которое немедленно получается переходом к пределу в неравенстве $u(x_n, y) \leqslant u(x_n, y_n)$ с учетом непрерывности функции $u(x, y)$.

В ситуациях, более сложных, чем описанная в лемме В.1, полезным оказывается еще одно понятие, связанное с непрерывностью отображений.

Определение. Отображение φ называется полунепрерывным снизу, если из того, что $x_n \to x_0$, $y_0 \in \varphi(x_0)$, вытекает существование последовательности y_n, $y_n \in \varphi(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, такой, что $y_n \to y_0$.

Как правило, доказательство полунепрерывности снизу отображения требует некоторой изобретательности — последовательность y_n надо угадывать.

Лемма В.2. Пусть функция $F(x, y)$, определенная на $X \times Y$, где X, Y — выпуклые компакты, непрерывна по x, y и выпукла по y. При этом пусть существует такая точка $y^* \in Y$, что $F(x, y^*) < 0$ для всех $x \in X$. Тогда отображение $\Psi(x) = \{y \mid F(x, y) \leqslant 0\}$ полунепрерывно сверху и снизу, а множества $\Psi(x)$ непусты, выпуклы и замкнуты.

Доказательство. Несложную проверку полунепрерывности сверху отображения $\Psi(x)$ предоставляем читателю.

Пусть $x_n \to x_0$, $y_0 \in \Psi(x_0)$. Рассмотрим множество $T_n = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1,\ t y_0 + (1-t) y^* \in \Psi(x_n)\}$. Поскольку $t=0 \in T_n$, то множество T_n непусто. Оно, очевидно, компактно. Пусть t_n — максимальный элемент множества T_n. Рассмотрим последовательность $y_n = t_n y_0 + (1-t_n) y^* \in \Psi(x_n)$. Последовательность t_n можно считать сходящейся (она принадлежит компакту $[0, 1]$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Если $t=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, и последовательность y_n — искомая. Допустим, $t<1$. Тогда, начиная с некоторого номера, все $t_n<1$. Покажем, что в этом случае $F(x_n, y_n)=0$. В самом деле, если $F(x_n, y_n)<0$, положим $t'_n = t_n + \varepsilon < 1$ и рассмотрим точку

$$y'_n = t'_n y_0 + (1-t'_n) y^* = y_n + \varepsilon (y_0 - y^*).$$

Воспользовавшись непрерывностью функции $F(x, y)$, возьмем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы $F(x_n, y'_n) < 0$, получив тем самым противоречие с максимальностью t_n. Следовательно, при $t<1$ имеем $\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = F(x_0, \bar{y}) = 0$, где $\bar{y} = ty_0 + (1-t)y^*$. Воспользуемся выпуклостью функции F по второму аргументу:

$$0 = F(x_0, \bar{y}) \leqslant tF(x_0, y_0) + (1-t)F(x_0, y^*).$$

Вспоминая, что $F(x_0, y^*) < 0$, получаем, что $F(x_0, y_0) > 0$, что противоречит включению $y_0 \in \Psi(x_0)$. Поэтому случая $t<1$ встретиться не может. Докончить доказательство предоставляем читателю.

В качестве упражнения оставляем читателю также доказать следующее весьма важное утверждение.

Лемма В.3. Пусть непрерывная функция $u(x, y)$ определена на $X \times Y$, где X, Y — выпуклые компакты; $u(x, y)$ вогнута по y. Кроме того, пусть многозначное отображение $\psi: X \longrightarrow Y$ полунепрерывно сверху и снизу, а множества $\psi(x)$ непусты, выпуклы для всех $x \in X$. Тогда отображение

$$\varphi(x) = \{y \mid y \in Y,\ u(x, y) = \max_{y' \in \psi(x)} u(x, y')\}$$

полунепрерывно сверху, а множества $\varphi(x)$ не пусты, выпуклы и замкнуты.

Отметим еще несколько простых, но важных свойств многозначных отображений.

Определение. Пусть имеется несколько полунепрерывных сверху отображений $\varphi_k: X \longrightarrow Y$, где X, Y — выпуклые компакты. Назовем их линейной комбинацией $\varphi = \Sigma \alpha_k \varphi_k$ отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ такую же линейную комбинацию всевозможных точек из $\varphi_k(x)$:

$$\varphi(x) = \{y \mid y = \Sigma\, \alpha_k y_k,\ y_k \in \varphi_k(x)\}.$$

Лемма В.4. Линейная комбинация полунепрерывных сверху отображений также полунепрерывна сверху.

Теорема (Какутани). Пусть X — компактное выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^n$, отображение $\varphi: X \longrightarrow Y$ полунепрерывно сверху и множества $\varphi(x)$ непусты и выпуклы. Тогда существует неподвижная точка $x_0 \in X: x_0 \in \varphi(x_0)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [2].

Глава 1

ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ

§ 1. Отношение предпочтения и функция полезности

Модели экономики, рассмотренные нами в первой части, описывают главным образом производственную структуру. Хотя формально в эти модели и можно включить потребление в качестве одного из производственных процессов, тем не менее личное потребление является весьма специфической составляющей экономической системы и заслуживает отдельного изучения. Вместе с тем модели Леонтьева, Неймана и Гейла пригодны для описания лишь сильно агрегированной экономики, что заложено в предположении о линейности производственных процессов.

В этой части мы обратимся к общей модели экономики, берущей свое начало от Вальраса [1] и получившей развитие в более поздних исследованиях (см. [26, 27, 28]).

В качестве одной из компонент модели Вальраса выступает отдельный потребитель, который располагая определенным доходом, тратит его на приобретение желаемого набора товаров. Математическая экономика исследует проблему потребительского спроса с абстрактной точки зрения, делая лишь самые общие предположения об индивидуальных свойствах и характере потребителя.

В ранних исследованиях по теории спроса в конце XIX в., носившей название «теория полезности», основное внимание уделялось малосущественным вопросам, таким, как предельная полезность (т. е. величина дополнительного эффекта для потребителя от дополнительной единицы какого-либо товара), за что эта теория справедливо подвергалась критике. Впоследствии эта теория освободилась от связывающих ее ограничений и превратилась в современную теорию потребительского спроса.

Предметом изучения в данном параграфе явится поведение отдельного потребителя, рассматриваемое с точки зрения рационального распределения личного бюджета.

Пространством товаров назовем неотрицательный ортант $\mathbf{R}_{+}^{n}$ n-мерного векторного пространства, каждая точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которого представляет собой определенный ассортиментный набор товаров. Величина x_i здесь показывает количество i-того товара при выбранной единице его измерения. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^n$ — множество, на котором определены интересы потребителя. Можно, например, считать, что X представляет собой множество всех мыслимых наборов товаров, доступных потребителю и пригодных для него. Любые два вектора $x, y \in X$ потребитель может сравнить и сделать из них выбор. Этот выбор зависит от вкусов потребителя, его бюджета и от цен на товары.

Вначале рассмотрим поведение потребителя, свободного от бюджетных ограничений.

В части I при изложении теоремы Раднера о магистрали мы использовали так называемую функцию полезности $u(x)$, определенную на $\mathbf{R}_{+}^{n}$. Эта функция приписывает всякому набору товаров x некоторое число — его «полезность» с точки зрения некоего индивидуума. Хотя функция полезности — несомненно, весьма удобное средство формализации многих экономических задач, тем не менее предположение о существовании такой функции есть некая гипотеза, справедливость которой можно оспаривать. С другой стороны, представляется естественным, что всякий человек может сделать выбор между любыми двумя наборами товаров. В этом случае говорят, что тем самым на множестве X задается отношение предпочтения.

Пусть на множестве X задано бинарное отношение $\succcurlyeq$, называемое отношением предпочтения. Делая определенные предположения о характере рассматриваемого индивидуума, потребуем выполнения следующих аксиом:

1) $x \succcurlyeq x$;
2) $x \succcurlyeq y,\ y \succcurlyeq z \to x \succcurlyeq z$;
3) для любой пары $x, y \in X$ либо $x \succcurlyeq y$, либо $y \succcurlyeq x$, либо и то и другое.

Если $x \succcurlyeq y$, и $y \not\succcurlyeq x$, будем писать $x \succ y$, если $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, будем писать $x \backsim y$. Ясно, что отношение $\backsim$ является отношением эквивалентности и, следовательно, индуцирует разбиение множества X на классы эквивалентности, так называемые классы безразличия.

Помимо основных аксиом 1)—3) на отношение предпочтения накладывают ряд других ограничений, главным из которых являются непрерывность и ненасыщаемость.

Определение. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется непрерывным на X, если множество $\{(x, y) \mid x \succ y\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$.

Содержательно это определение означает следующее: если набор товаров x_0 строго предпочтительнее, чем набор y_0 $(x_0 \prec y_0)$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется, т. е. если точки x, y близки соответственно к x_0 и y_0, то $x \succ y$. Данное определение непрерывности можно заменить на другое, на первый взгляд более слабое, но на самом деле, как нетрудно показать, эквивалентное первому.

Определение. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется непрерывным на X, если

а) множество $\{y \mid \bar{y} \succ y\}$ открыто в X при любом $\bar{y} \in X$;

б) множество $\{x \mid x \succ \bar{x}\}$ открыто в X при любом $\bar{x} \in X$.

Несмотря на то что предположение о непрерывности отношения предпочтения является одним из основных, обычно принимаемых в теории потребления, нетрудно указать довольно простое и естественное отношение, не удовлетворяющее этому требованию. Пусть заданы две непрерывные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$. Положим $x \succcurlyeq y$, если $f_1(x) > f_1(y)$, а если $f_1(x) = f_1(y)$, то если $f_2(x) \geqslant f_2(y)$. Пусть теперь наборы x_0, $\bar{x}$ таковы, что $f_1(x_0) = f_1(\bar{x})$, $f_2(x_0) > f_2(\bar{x})$. Нетрудно видеть, что множество $\{x \mid x \succ \bar{x}\}$ вовсе необязательно открыто в X, поскольку в любой окрестности точки x_0, принадлежащей данному множеству, могут найтись такие точки x, что $f_1(x) < f_1(x_0)$.

Основное удобство свойства непрерывности отношения предпочтения заключается в том, что его можно при желании заменить, смоделировать числовой функцией.

Определение. Функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения $\succcurlyeq$, если $u(x) \geqslant u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succcurlyeq y$.

Мы не будем здесь доказывать теорему существования функции полезности (хотя в случае $X \subseteq \mathbf{R}^n$ это несложно), сошлемся на теорему Дебре [28], из которой в случае, когда $X \subseteq \mathbf{R}^n$, вытекает следующее, достаточное для нас утверждение.

Теорема (Дебре). Если множество X связно, а отношение предпочтения непрерывно, то функция полезности существует.

Нетрудно видеть, что если $u(x)$ — функция полезности на X, $f(t)$ — строго возрастающая функция, то функция $v(x) = f(u(x))$ также является функцией полезности на X. Обратно, если $u(x)$, $v(x)$ — две функции полезности, то всегда существует такая строго возрастающая функция $f(t)$, что $v(x) = f(u(x))$. Действительно, функцию $f(t)$ можно построить следующим образом. Пусть $t \in u(X)$ — множеству значений функции u. Положим $f(t) = v(x)$, где x — произвольный элемент множества $u^{-1}(t) = \{x \mid u(x) = t\}$. Значение $f(t)$ здесь определено однозначно, поскольку если $x' \in u^{-1}(t)$, то $u(x) = u(x')$, следовательно, $x \backsim x'$ и $v(x) = v(x')$. Построенная функция $f(t)$ на множестве $u(X)$ строго возрастает, так как если $t, t' \in u(X)$, $t > t'$, то для любых $x \in u^{-1}(t)$ и $x' \in u^{-1}(t')$ выполняется $x \succ x'$ и $f(t) = v(x) > v(x') = f(t')$. По построению $v(x) = f(u(x))$.

Таким образом, если для отношения предпочтения существует хотя бы одна функция полезности, то их существует бесконечно много. В силу этого обстоятельства и из-за невозможности предпочесть одну функцию полезности другой, многие специалисты в этом вопросе избегают пользоваться такой кардинальной (числовой) измеримостью полезности, предпочитая все рассуждения вести на ординалистском (порядковом) языке.

Определение. Точкой насыщения называется наиболее предпочтительный элемент $x \in X$, т. е. если $x \succcurlyeq y$ для всех $y \in X$. Если X не содержит точки насыщения, то говорят, что имеет место ненасыщаемость.

На языке функции полезности ненасыщаемость означает, что функция $u(x)$ неограничена на X.

§ 2. Функции спроса и предложения

Опишем теперь поведение потребителя, стесненного бюджетными ограничениями.

Пусть фиксированы цены $p \in \mathbf{R}_+^n$ на товары, функция полезности $u(x)$ и капитал $K(p)$ потребителя. Обозначим через $\widehat{X}(p)$ множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p:

$$\widehat{X}(p) = \{x \mid x \in X,\ (x, p) \leqslant K(p)\}. \qquad (2.1)$$

Назовем функцией спроса $\Phi(p)$ потребителя следующее многозначное отображение всевозможных цен p в пространство товаров $\mathbf{R}_+^n$:

$$\Phi(p) = \begin{cases} x,\ x \in \widehat{X}(p),\ u(x) = \max\limits_{x' \in \widehat{X}(p)} u(x') \\ \qquad \text{если максимум достигается,} \\ \varnothing \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Основная трудность при построении функции спроса состоит в том, что множество $\widehat{X}(p)$, как правило, неограничено и максимум в определении $\Phi(p)$ может не существовать даже при предполагаемой непрерывности функции $u(x)$. В самом деле, если цена на какой-то товар равна 0, то из (2.1) следует, что соответствующая координата вектора $x \in \widehat{X}(p)$ может быть сколь угодно большой. Предполагая данного потребителя ненасыщаемым, получаем, что функция $u(x)$ неограничена и максимум ее на множестве $\widehat{X}(p)$, вообще говоря, необязательно достигается. Существуют различные способы преодоления этой трудности. С целью не усложнять изложения выберем самый простой из них. Будем предполагать, что множество X, на котором определена функция полезности $u(x)$, устроено следующим образом: если в последовательности $x^k \in X$ некоторая компонента x_j^k стремится к бесконечности при $k \to \infty$, то стремятся к бесконечности и все прочие координаты векторов x^k, $k = 1, 2, \ldots$. Другими словами, если потребителю требуется слишком много одного товара, то он хочет и больших количеств всех остальных интересующих его товаров. Эту гипотезу можно понимать как усиление требования о ненасыщаемости. Приняв это предположение о структуре множества X, мы получаем, что при любом ненулевом векторе цен p при постоянном доходе потребителя $K(p)$ множество $\widehat{X}(p)$ оказывается ограниченным. В таком случае функция спроса $\Phi(p)$ оказывается определенной на всем множестве цен $p\in \mathbf{R}^n_+$, $p\neq 0$.

Потребуем дополнительно, чтобы функция $K(p)$ дохода потребителя была однородной первой степени, т. е. $K(\lambda p)=\lambda K(p)$ для всех $\lambda>0$. Тогда отображения $\widehat{X}(p)$ и $\Phi(p)$ оказываются однородными нулевой степени:

$$\widehat{X}(\lambda p)=\widehat{X}(p),\ \Phi(\lambda p)=\Phi(p),$$

что выражает тот факт, что выбор потребителя зависит только от соотношения цен на различные товары, но не от масштаба цен. Мы считаем, что поведение потребителя описывается функцией $\Phi(p)$. Окончательный выбор потребителя состоит в указании вектора $x\in\Phi(p)$.

При построении той или иной частной модели экономики часто делают различные предположения относительно отображения $\Phi(p)$. Иногда считают, что отображение $\Phi(p)$ однозначно — для этого достаточно потребовать, например, строгой-вогнутости функции полезности $u(x)$.

Если потребитель ненасыщаем, то он тратит весь свой капитал $K(p)$, т. е. для любого вектора цен $p\geqslant 0$ и любого вектора $x\in\Phi(p)$ имеет место равенство $(x,p)=K(p)$.

Перейдем к описанию отдельного производителя.

В нашем понимании отдельный производитель — это некоторое технологическое многозначное отображение $F(x)$ множества $\mathbf{R}^n_+$ в себя. Произвольная точка графика Γ этого отображения, т. е. пара (x, y), где $x\in \mathbf{R}^n_+$, $y\in F(x)$, — это производственный процесс. Производитель не участвует в распределении конечного продукта, весь продукт распределяется между потребителями.

Пусть заданы цены p. Тогда прибыль производителя от процесса (x, y) равна $(y-x, p)$. Мы считаем, что поведение производителя определяется стремлением максимизировать прибыль. Другими словами, он выбирает всякий раз такой производственный процесс $(x, y) \in \Gamma$, чтобы

$$(y-x,\ p) = \max_{(x', y') \in \Gamma} (y' - x',\ p).$$

Назовем процесс $(x,\ y)$ оптимальным при ценах p.

Назовем *функцией предложения* производителя многозначное отображение $\Psi(p) = \{y - x \mid (x, y)$ — оптимальный процесс при ценах $p\}$.

Назовем множество

$$Y = \{y - x \mid x \in R^n_+,\ y \in F(x)\}$$

технологическим отображением в варианте потоков. Элементы множества Y будем называть планами. При разумных ограничениях оказывается безразличным, рассматривать ли график Γ отображения $F(x)$, как мы это делали в предыдущих главах, или множество Y, поскольку нас интересует лишь конечный продукт производства в статическом варианте модели. Тогда

$$\Psi(p) = \{y \in Y \mid (y,\ p) = \max_{y' \in Y} (y',\ p)\}$$

— множество оптимальных планов.

Мы видели уже достаточно примеров технологических отображений $F(x)$. В частности, для модели Леонтьева

$$F(x) = \{y \mid y = z,\ zA \leqslant x,\ z \geqslant 0\}.$$

Для модели Неймана

$$F(x) = \{y \mid y = zB,\ zA \leqslant x,\ z \geqslant 0\}.$$

§ 3. Неоклассическая теория спроса

Материал данного параграфа лежит несколько в стороне от общего содержания данной книги, но составляет неотъемлемую часть современной теории спроса. Речь в нем идет о выяснении влияния изменений цен на товары и дохода потребителя на его выбор. Основным содержанием неоклассической теории спроса является уравнение Слуцкого [29]:

Пусть $u(x)$, $K>0$ — соответственно функция полезности и капитал потребителя, $p \in R^n_+$ — вектор цен на товары. Сделаем следующие предположения. Считаем, что область определения X функции полезности совпадает с R^n_+. Функция $u(x)$ предполагается дважды дифференцируемой и строго выпуклой. Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty,$$

$$\lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из условия строгой выпуклости следует, что матрица Гессе вторых производных функции $u(x)$ отрицательно определена во всех точках $x \in R^n_+$. Обозначим

$$U(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

— матрицу Гессе. Напомним, что отрицательно определенная матрица невырождена.

Наконец, будем рассматривать лишь $p>0$.

Поведение потребителя определяется следующей задачей математического программирования:

$$\max u(x),$$

$$px = K,$$

$$x \geqslant 0.$$

Поскольку множество векторов x, допустимых для данной задачи, ограничено и выпукло, то она имеет единственное решение $x^*(p, K)$, которое в данном случае представляет собой однозначную функцию спроса потребителя. Из условий, наложенных на первые частные производные функции u, немедленно вытекает, что $x^*(p, K)>0$. Поскольку $x^*(p, K)$ является внутренней точкой области R^n_+, то мы можем использовать стандартные локальные условия максимума.

Построим функцию Лагранжа для нашей задачи.

$$L(x, \lambda) = u(x) - \lambda((p, x) - K).$$

Согласно теореме Лагранжа существует число λ^* такое, что пара $(x^*(p, K), \lambda^*)$ является локальным максимумом функции $L(x, \lambda)$. Запишем условия локального экстремума для функции $L(x, \lambda)$:

$$(p, x^*) - K = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3}$$

где $x^* = x^*(p, K)$. Из (2.3), в частности, вытекает $\lambda^* > 0$.

Рассмотрим влияние изменения цены одного продукта, скажем p_n, на поведение потребителя. Дифференцируя (2.2) и (2.3) по p_n, получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} = -x_n^*, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} p_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \lambda^*, & i = n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ вычисляются в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Будем рассматривать уравнения (2.4) — (2.5) как систему для определения вектора $\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n}, \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)$. Обозначив вектор $\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)$ через $\frac{\partial x^*}{\partial p_n}$, запишем систему (2.4) — (2.5) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $U = U(x^*)$ — матрица Гессе. Здесь ноль в правой части равенства означает $(n-1)$-мерный нулевой вектор. Поскольку матрица U отрицательно определена и невырождена, то невырождена и матрица системы (2.6). В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & U \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu, & \mu p U^{-1} \\ \mu U^{-1} p', & \mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\mu = -1/pU^{-1}p'$. Здесь во избежание недоразумений через p' обозначен вектор-столбец. Из (2.6) имеем

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right) = \mu U^{-1} p' x_n^* + \lambda^* (\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1})^{(n)}, \quad (2.7)$$

где символ $M^{(n)}$ обозначает n-ный столбец матрицы M.

Рассмотрим влияние компенсированного изменения цены, т. е. такого, при котором одновременно так изменяется величина дохода K, что максимальное значение функции полезности остается неизменным. Так как из (2.3)

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

а из (2.2)

$$dK = \sum_{i=1}^{n} x_i \, dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

то для того чтобы величина $\bar{u}$ осталась постоянной (т. е. $du = 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=0}^{n} p_i \, dx_i = 0$.

В этом случае $dK = \sum_{i=1}^{n} x_i \, dp_i$. Отсюда $\partial K/\partial p_n = x_n$. Дифференцируя (2.2) с учетом этого, получаем

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} = 0. \quad (2.8)$$

Дифференцирование уравнения (2.3) дает, естественно, равенство, совпадающее с (2.5). Объединяя (2.8) и (2.5) в систему для определения вектора

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}},$$ получаем

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\mathrm{comp}} = [\mu\lambda^* U^{-1} p' p\ U^{-1} + \lambda^* U^{-1}]^{(n)}. \qquad (2.9)$$

Наконец, исследуем влияние изменения капитала K при неизменных ценах p. Дифференцируя (2.2) и (2.3) по K и проделав затем преобразования совершенно аналогичные предыдущим, получим

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = -\mu U^{-1} p, \qquad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = \left\{\frac{\partial x_1^*}{\partial K}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial K}\right\}.$$

Из (2.7), (2.9) и (2.10) получаем

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\mathrm{comp}} - \left(\frac{\partial x^*}{\partial K}\right) x_n^*. \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.11) называется уравнением Слуцкого и является основным в неоклассической теории полезности.

Рассмотрим матрицу $H = \mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}$, участвующую в равенствах (2.7) и (2.9). Ясно, что H симметрична. Покажем, что H отрицательно полуопределена. Точнее, пусть $z \in \mathbf{R}^n$. Тогда $zHz' \leqslant 0$, причем $zHz' = 0$ тогда и только тогда, когда $z = \alpha p$ при некотором α. Нетрудно проверить, что $Hp' = pH = 0$. Пусть $z \neq \alpha p$. Тогда вектор z можно представить в виде $z = \alpha p + v$, где $v \neq 0$, $vU^{-1}p' = 0$. Для этого достаточно положить

$$\alpha = \frac{zU^{-1}p'}{pU^{-1}p'}.$$

Далее,

$$zHz' = vHv' = \mu v U^{-1} p' p U^{-1} v' + vU^{-1}v' = vU^{-1}v' < 0,$$

поскольку матрица U^{-1} отрицательно определена вместе с матрицей U.

Из отрицательной полуопределенности матрицы H вытекает, в частности, что все ее диагональные элементы отрицательны: $h_{ii} = e_i H e_i' < 0$, где e_i—i-тый базисный вектор. Тогда из (2.9) имеем $\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{\mathrm{comp}} < 0$.

Это означает, что возрастание цены товара при соответствующей компенсации дохода приводит тем не менее к понижению спроса на этот товар.

Назовем n-тый товар ценным, если $\frac{\partial x_n^*}{\partial K} > 0$, т. е. если при увеличении дохода спрос на этот товар также увеличивается, и малоценным в противном случае.

Умножим (2.10) скалярно на p, получаем

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial K}, p\right) = 1,$$

откуда следует существование ценных товаров.

Записав уравнение Слуцкого для n-того товара

$$\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial K}\right) x_n^*,$$

видим, что спрос на ценный товар при повышении цены на него обязательно падает, так как $\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} < 0$ в этом случае.

Далее, из (2.9) имеем, что

$$\left(\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}}, p\right) = 0.$$

Поскольку $p > 0$, $\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} < 0$, то обязательно найдется хотя бы один номер j, для которого $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} > 0$.

Два товара j, l называются взаимозаменяемыми, если $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} > 0$, т. е. если при возрастании цены на товар l при компенсирующем изменении дохода с одновременным падением спроса на товар l возрастет спрос на товар j.

Таким образом, нами только что было показано, что для каждого товара существует по крайней мере один товар, образующий с ним взаимозаменяемую пару.

Глава 2

МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА

§ 1. Описание модели

Модель Вальраса изучает экономику в полностью дезагрегированном виде. Ее исходными компонентами являются отдельный производитель (завод, фабрика и т. д.) и отдельный потребитель (частное лицо, домашнее хозяйство).

Исторически модель Вальраса явилась одной из первых экономико-математических моделей и была изложена ее создателем на формальном языке, весьма близком к современному. Несмотря на то что эта модель является сугубо теоретической, идеи, заложенные в ней, оказали и продолжают оказывать плодотворное влияние на все области моделирования экономических процессов. Так, понятие конкурентного равновесия, составляющее ядро модели Вальраса, впоследствии трансформировалось в понятие динамического равновесия в модели Неймана. Само описание производственного процесса, принятое, скажем, в модели Леонтьева, также берет свое начало у Вальраса.

Некоторые авторы считают, что модель Вальраса предназначена для описания «децентрализованной» (читай «капиталистической») экономики, поскольку в ней предполагается, что каждый участник полностью свободен в выборе своих действий, руководствуясь лишь стремлением к собственному благополучию.

Однако основной вывод из модели общего равновесия, состоящий в собственно существовании равновесия, одновременно показывает, что осуществление этого равновесия возможно не при всех действиях участников моделируемой экономической системы. Выясняется, что равновесие возможно лишь при согласованных решениях всех производителей и потребителей. Сам Вальрас и современные нам буржуазные авторы утверждают, что подобное согласование в конкурентной экономике осуществляется при помощи рынка товаров, осуществляющего необходимую увязку цен на товары. Автору же представляется очевидным, что основной вывод из модели Вальраса как раз указывает на необходимость существования планового, согласующего органа.

Перейдем к описанию модели.

Структура общества предполагается состоящей из двух секторов: производственного и потребления. Сектор потребления можно мыслить как совокупность всех индивидуумов, составляющих общество, а также учреждений, не участвующих непосредственно в производстве. Производственный сектор состоит, скажем, из отдельных отраслей, фирм и индивидуумов, выступающих в качестве производителей. Один и тот же объект может фигурировать и как производитель и как потребитель.

Товары, обращающиеся в данной системе, также имеют двоякий характер. Одна группа товаров, назовем их продуктами производства, характеризуется тем, что каждый из них может быть произведен в производственном секторе: металл, машины, электроэнергия и т. п. Другая группа товаров, называемых первичными факторами, состоит из таких, которые производственным сектором не выпускаются: труд, земля и т. п. Следует отметить, что такой «товар», как труд, качественно отличается от всех остальных компонент производства и его включение в число первичных факторов наряду с другими следует рассматривать как определенную идеализацию. В некоторых моделях, близких по идейному содержанию к излагаемой модели Вальраса, труд рассматривается как единственный первичный фактор, и его использование предполагается необходимым в любом производственном процессе. Мы, однако, не имеем возможности подробно на этом останавливаться.

Первичные факторы являются собственностью потребителей, которые их продают с целью приобретения продуктов производства.

Потребитель, находясь в рамках бюджетных ограничений, стремится получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента продуктов.

Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных продуктов и затрат на приобретение первичных факторов и других продуктов для осуществления производства.

Итак, мы предполагаем, что каждый из участников экономической системы максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях, причем и целевая функция и ограничения зависят от цен на товары и первичные факторы в нашей системе.

Вопрос о ценах является центральным вопросом в данной модели. Предполагается, что каждый участник пассивно приемлет существующую систему цен, не пытаясь на нее влиять. Это предположение, совершенно естественное для плановой экономики, конечно, не выполняется в экономике буржуазной с наличием монополий и олигархий. Западные ученые-экономисты, пытаясь приспособить модель Вальраса для такой экономики, в большинстве своем соглашаются с тем, что указанное предположение следует считать имеющим место в экономике с «совершенной» конкуренцией. Аналогичные модели, учитывающие наличие монополий, мало разработаны в силу их математической сложности.

Цены на продукты и первичные факторы называются равновесными, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый продукт и фактор не превосходит его предложения.

Основной вопрос в общей модели экономики — существуют ли равновесные цены — ждал своего решения более полувека и ответ на него был получен лишь в последние 20 лет, если не считать работ Вальда [26, 27], исследовавшего наиболее простые случаи моделей.

Ниже мы изложим на формальном уровне модель Вальраса, и рассмотрим две ее разновидности при различных ограничениях на составные компоненты модели. Первая из них, предложенная Касселем, близка к модели, рассмотренной Вальдом, вторая, наиболее известная в настоящее время, — это модель Эрроу-Дебре. Для них мы докажем существование равновесных цен.

Следует отметить, что в различных модификациях модели Вальраса не всегда делают различие между продуктами производства и первичными факторами. Иногда их объединяют в одно понятие продукта и обозначают единым вектором. Это зависит от подробности описания производственного сектора — существуют ли в нем промежуточные продукты, используемые вновь в работе этого сектора, или же всякий процесс выдает конечный продукт непосредственно из первичных факторов. Нам встретятся оба подхода.

Формальная запись модели Вальраса такова.

Рассматривается экономика с l потребителями, m производителями и n типами товаров. Продукты производства и первичные факторы на данном уровне общности не различаются. Каждый потребитель характеризуется функцией дохода $K_i(p)$ и функцией спроса $\Phi_i(p)$. Производитель характеризуется множеством $Y_k \subseteq \mathbf{R}^n$ производственных планов и функцией предложения $\Psi_k(p)$, $k=1, 2, \ldots, m$. Мы считаем, что множество производственных планов Y_k каждого производителя является компактным множеством в $\mathbf{R}^n$. В этом предположении, конечно, наиболее существенным является требование ограниченности множества Y_k — невозможность производства в больших масштабах. С формальной точки зрения априорное требование компактности множеств Y_k может показаться чересчур сильным. Мы, тем не менее, прибегаем к нему опять-таки ради простоты изложения.

Будем считать, что величина дохода $K_i(p)$ каждого потребителя складывается из двух величин: от продажи его начального запаса товаров b_i, стоимость которого равна (b_i, p), и некоторого дохода $I_i(p)$, возникающего, скажем, в результате участия потребителя в доходах производственного сектора. Таким образом, $K_i(p) = (b_i, p) + I_i(p)$.

Назовем совокупным технологическим множеством Y сумму

$$Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k,$$

функцией совокупности предложения производственного сектора $\Psi_0(p)$ сумму

$$\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p).$$

Пусть

$$\overline{\Psi}_0(p) = \{y \mid y \in Y,\ (y, p) = \max_{y' \in Y}(y', p)\}$$

— множество планов, оптимальных с точки зрения всего производственного сектора. Покажем, что

$$\overline{\Psi}_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p) = \Psi_0(p).$$

Другими словами, планы, оптимальные с точки зрения всего производственного сектора, оптимальны и с точки зрения каждого производителя. В самом деле, пусть $y_0 \in \overline{\Psi}_0(p)$, тогда $y_0 = \sum_{k=1}^{m} y_k$, $y_k \in Y_k$. Пусть $y'_k \in \Psi_k(p)$,

тогда

$$(p, y_0) = \sum_{k=1}^{m} (p, y_k) \leqslant \sum_{k=1}^{m} (p, y'_k) = \left(p, \sum_{k=1}^{m} y'_k\right) \leqslant (p, y_0).$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{m} (p, y_k) = \sum_{k=1}^{m} (p, y'_k)$. Поскольку $(p, y_k) \leqslant (p, y'_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то $(p, y_k) = (p, y'_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и $y_k \in \Psi_k(p)$ для всех k. Тем самым показано, что $y_0 \in \Psi_0(p)$, т. е. $\overline{\Psi}_0(p) \subseteq \Psi_0(p)$. Обратное включение еще более очевидно.

Таким образом, мы можем характеризовать весь производственный сектор совокупным технологическим множеством Y и функцией совокупного предложения $\Psi_0(p)$, забыв об отдельных производителях.

Считаем, что весь доход производственного сектора делится между потребителями. Это значит, что $\sum_{i=1}^{l} I_i(p) \equiv (y, p)$ для произвольного $y \in \Psi_0(p)$.

Определение. Набор $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*; x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*; p^*)$ неотрицательных векторов называется конкурентным равновесием, если

$$y_k^* \in \Psi_k(p^*), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.12}$$

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*), \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.13}$$

При этом должны выполняться соотношения баланса спроса и предложения

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \geqslant \sum_{i=1}^{l} x_i^* \qquad (2.14)$$

$$\left(p^*, \sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i\right) = \left(p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^*\right). \qquad (2.15)$$

Определение. Вектор p^* — компонента конкурентного равновесия — называется вектором равновесных цен.

Назовем функцией совокупного спроса многозначное отображение

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p).$$

Функцией совокупного предложения — отображение

$$\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p),$$

где $b = \sum_{i=1}^{l} b_i$.

Функции $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ связаны соотношением

$$(p, x) \leqslant (p, y) \qquad (2.16)$$

при $x \in \Phi(p)$, $y \in \Psi(p)$.

В самом деле, если $x \in \Phi(p)$, $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$, $x_i \in \Phi_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, то из (2.1) имеем $(x_i, p) \leqslant (b_i, p) + I_i(p)$. Суммируя по i, получаем

$$(x, p) \leqslant (b, p) + \sum_{i=1}^{l} I_i(p).$$

С другой стороны, если $y \in \Psi(p)$, то $y = b + \sum_{k=1}^{m} y_k$, $y_k \in \Psi_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $y_0 = \sum_{k=1}^{m} y_k$. Тогда $y_0 \in \Psi_0(p)$ и $\sum_{i=1}^{l} I_i(p) = (y_0, p)$. Отсюда $(y, p) = (b, p) + \sum_{i=1}^{l} I_i(p)$, и соотношение (2.16) доказано.

Соотношение (2.16) называется законом Вальраса в широком смысле. Замена в (2.16) неравенства на равенство превращает (2.16) в закон Вальраса в узком смысле. Закон Вальраса в широком смысле означает, что в стоимостном выражении спрос не превосходит предложения при любых ценах $p \geqslant 0$, $p \neq 0$.

Общая модель равновесия Вальраса изложена. Смысл всех требований в определении равновесия ясен из предшествующего. Так, условия (2.12), (2.13) означают, что каждый из участников, рассматривая цены p^* как заданные, действует наилучшим для себя образом.

Левая часть соотношения (2.14) представляет собой совокупное предложение, а правая — совокупный спрос на товары. Словесная формулировка этого соотношения такова: спрос не должен превышать предложения.

Соотношение (2.15) означает, что стоимость купленных товаров равна стоимости проданных. Отсюда, в частности, вытекает, что если в (2.14) в какой-то компоненте j имеет место строгое неравенство, т. е. предложение j-того товара превышает спрос на него, то соответствующая компонента p_j^* вектора равновесных цен p^* равна 0, т. е. j-тый товар является свободным. С использованием понятий функций совокупного спроса и предложения определение конкурентного равновесия можно переформулировать следующим образом.

Определение. Набор (y^*, x^*, p^*) называется конкурентным равновесием, если

$$y^* \in \Psi(p^*), \tag{2.17}$$

$$x^* \in \Phi(p^*), \tag{2.18}$$

$$y^* \geqslant x^*, \tag{2.19}$$

$$(p^*, y^*) = (p^*, x^*). \tag{2.20}$$

§ 2. Существование равновесия в модели Эрроу—Дебре

Модель, которая излагается в данном разделе, по своей общности близка к общей модели Вальраса. Основное отличие состоит в конкретизации функций дохода $I(p)$ потребителей и в ряде дополнительных предложений о начальной собственности и характере поведения потребителей. Некоторые из этих ограничений существенны, другие приняты с целью сделать изложение достаточно прозрачным, не загромождая его излишними при первоначальном знакомстве с предметом подробностями. Более полное и скрупулезное изложение можно найти в [2].

Отметим, что частным случаем данной модели (как и общей модели Вальраса) является модель чистого обмена — случай, когда производство отсутствует. О такой линейной модели мы упоминали в ч. I, называя ее моделью международной торговли.

Основным инструментом при доказательстве существования равновесия является теорема Какутани о неподвижной точке.

Перейдем к описанию модели.

Относительно каждого потребителя i, $1 \leqslant i \leqslant l$, по сравнению с описанием § 1 дополнительно предполагается следующее:

$$1.\ K_i(p) = (p, b_i) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(p, y_j),$$

где b_i — начальный запас товаров; α_{ij} — доля доходов j-того производителя, которую получает i-тый потребитель; y_j — план j-того производителя в терминах потоков, $\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1$. Таким образом, капитал потребителя складывается из продажи начального запаса и участия в прибылях производственного сектора (скажем, в качестве акционера или наемного рабочего).

2. Множество X_i, $i=1, 2, \ldots, l$, на котором определена функция полезности $u_i(x)$ i-того потребителя, выпукло и замкнуто, $X_i \in \mathbf{R}^n_+$ и неограничено.

3. Функция $u_i(x)$ непрерывна и вогнута на X_i, $i=1, 2, \ldots, l$.

4. Для всякого i существует $\bar{x}_i \in X_i$ такой, что

$$\bar{x}_i < b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

5. Всякий потребитель ненасыщаем.

Из всех условий 1—5 наиболее существенным, конечно, является условие 4, из которого, в частности, следует, что каждый потребитель имеет ненулевой начальный запас всякого товара. Ослабление условия 4 привело бы к дополнительным техническим трудностям, поэтому мы его принимаем в таком виде.

Относительно производственного сектора, рассматриваемого нами в варианте потоков, предположим следующее:

а) множество Y_k планов k-того производителя компактно и $0 \in Y_k$, $k=1, 2, \ldots, m$;

б) множество $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ выпукло.

Для описанной модели докажем существование конкурентного равновесия. Доказательство будет состоять в сведении взаимоотношений «государства», назначающего цены, и «общества» — всех участников данной экономической системы к игре двух лиц с непротивоположными интересами.

Напомним некоторые основные понятия теории игр. Игрой двух лиц называется совокупность $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, f_1, f_2)$, где $\mathfrak{A}_i$ — пространство стратегий i-того игрока, $f_i(a_1, a_2)$ — его целевая функция, которую i-тый игрок стремится минимизировать, $i=1, 2$. Предполагается, что игроки независимо выбирают $a_1 \in \mathfrak{A}_1$ и $a_2 \in \mathfrak{A}_2$, чем определяется значение каждой функции цели. Точка $(a_1^*, a_2^*) \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ называется точкой равновесия, если

$$f_1(a_1^*, a_2^*) = \min_{a_1 \in \mathfrak{A}_1} f_1(a_1, a_2^*),$$

$$f_2(a_1^*, a_2^*) = \min_{a_2 \in \mathfrak{A}_2} f_2(a_1^*, a_2).$$

Положим

$$F_1(a_2) = \{a_1 \mid a_1 \in \mathfrak{A}_1,\ f_1(a_1, a_2) = \min_{a_1' \in \mathfrak{A}_1} f_1(a_1', a_2)\},$$

$$F_2(a_1) = \{a_2 \mid a_2 \in \mathfrak{A}_2,\ f_2(a_1, a_2) = \min_{a_2' \in \mathfrak{A}_2} f_2(a_1, a_2')\}.$$

Определим многозначное отображение $F: \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ формулой

$$F(a_1, a_2) = F_1(a_2) \times F_2(a_1).$$

Ясно, что точка (a_1^*, a_2^*) является точкой равновесия тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой отображения F.

Непосредственно из теоремы Какутани вытекает

Лемма 2.1. Если множества $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ компактны и выпуклы, множества $F_1(a_2)$ и $F_2(a_1)$ выпуклы и непусты при любых $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_2 \in \mathfrak{A}_2$, отображение F_i полунепрерывно сверху, $i = 1, 2$, то игра $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, f_1, f_2)$ имеет точку равновесия.

Пусть, как и раньше, $\hat{X}_i(p)$ обозначает множество всех наборов товаров, доступных потребителю в силу бюджетных ограничений при ценах p:

$$\hat{X}_i(p) = \left\{x_i \mid x_i \in X_i,\ (p, x_i) \leqslant (p, b_i) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(p, y_j)\right\}.$$

В дальнейшем считаем, что цены p берутся из некоторого компактного множества S, скажем, $\|p\| = 1$.

Докажем ограниченность множества $\bigcup_{p \in S} \hat{X}_i(p)$.

Из компактности S вытекает, что существует константа c_i, для которой

$$(p, b_i) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(p, y_j) \leqslant c_i$$

для всех $p \in S$ и фиксированных y_j. Другими словами,

$$\hat{X}_i(p) \subseteq \{x_i \mid x_i \in X_i,\ (x_i, p) \leqslant c_i\}.$$

Тогда

$$\bigcup_{p \in S} \hat{X}_i(p) \subseteq \{x_i \mid x_i \in X_i,\ (x_i, p) \leqslant c_i \text{ для некоторого } p \in S\} = \tilde{X}_i.$$

Покажем ограниченность множества $\tilde{X}_i$. Пусть $x_i^k \in \tilde{X}_i$ и последовательность $x_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, неограничена. Из предположения 3 вытекает, что для достаточно больших k все компоненты вектора $x_i^{(k)}$ сколь угодно велики. Это, однако, противоречит тому, что $(p_k, x_i^{(k)}) \leqslant c_i$ для некоторого $p \in S$.

Лемма 2.2. Пусть $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$, $\Psi(p)$ — соответственно функции совокупного спроса и предложения, определенные в § 2. Тогда множества $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ непусты, выпуклы и замкнуты, а отображения Φ и Ψ полунепрерывны сверху.

Доказательство. Проследим построение отображения Φ. Очевидно, что при каждом $p \in S$ множество $\hat{X}_i(p)$, определенное формулой (2.1), выпукло и замкнуто и ограничено. Непустота его следует из условия 4. Это же условие позволяет нам применить к функции $(x, p) - K_i(p)$, которая в нашем случае непрерывна, лемму В.2. Таким образом, отображение $\hat{X}_i(p)$ полунепрерывно сверху и снизу. Тогда лемма В.3 утверждает полунепрерывность сверху отображения Φ_i и тот факт, что множества $\Phi_i(p)$ непусты, выпуклы и замкнуты. Лемма В.4 дает утверждение доказываемой леммы относительно отображения Φ. Аналогично доказывается утверждение относительно Ψ, надо лишь воспользоваться условиями а) и б) на производственный сектор. Лемма доказана.

Рассмотрим отображение $V(p) = \Psi(p) - \Phi(p)$. Вновь лемма В.4 позволяет установить полунепрерывность сверху отображения V. Ясно также, что для всякого $p \in S$ множество $V(p)$ непусто, выпукло, замкнуто и множество $\bigcup_{p \in S} V(p)$ ограничено. Заметим, что точки $v \in V(p)$ представляют собой разность между предложением и платежеспособным спросом при оптимальных действиях всех участников и ценах p. В некотором смысле v представляет собой выбор «общества».

Рассмотрим, наконец, игру $G = (S, V, f_1(p, v), f_2(p,$

v)), где V есть замкнутая, выпуклая оболочка множества $\bigcup\limits_{p\in S}\mathbf{V}(p)$,

$$f_1(p, v) = (p, v),\ f_2(p, v) = \min_{v'\in\mathbf{V}(p)}\|v' - v\|.$$

Покажем, что у этой игры есть точка равновесия. Компактность и выпуклость множеств S и V налицо. Построим отображения

$$F_1(v) = \{p\,|\,p\in S,\ (p, v) = \min_{p'\in S}(p', v)\},$$

$$F_2(p) = \{v\,|\min_{v'\in\mathbf{V}(p)}\|v' - v\| = \min_{v''\in V}\ \min_{v'\in\mathbf{V}(p)}\|v' - v''\| = 0\}.$$

Очевидно, что отображение $F_1(v)$ полунепрерывно сверху, а множество $F_1(v)$ непусто, выпукло и замкнуто при всех $v\in V$. Отображение же $F_2(p)$, как следует из его определения, совпадает с $\mathbf{V}(p)$ (здесь нам вновь потребовалась замкнутость $\mathbf{V}(p)$ — из того факта, что $\|v'-v\|\to 0$ для некоторого $v'\to v$, $v'\in\mathbf{V}(p)$, мы заключаем, что $v\in\mathbf{V}(p)$).

Применяя лемму 2.1, получаем, что наша игра G имеет точку равновесия. Покажем, что любая точка равновесия (p^*, v^*) игры G задает состояние равновесия модели Эрроу — Дебре. По определению точки равновесия и функций $f_1(p, v)$, $f_2(p, v)$ имеем

$$(p^*, v^*) = \min_{p\in S}(p, v^*), \tag{2.21}$$

$$v^*\in\mathbf{V}(p^*).$$

Вспомним, что $\mathbf{V}(p^*) = \Psi(p^*) - \Phi(p^*)$. Следовательно, существуют такие векторы $y^*\in\Psi(p^*)$, $x^*\in\Phi(p^*)$, что $v^* = y^* - x^*$. Проверим, что тройка (y^*, x^*, p^*) осуществляет конкурентное равновесие модели. В самом деле, условия (2.17) и (2.18) из соответствующего определения выполнены автоматически.

Пусть $x^* = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_l^*$, где $x_i^*\in\widehat{X}_i(p^*)$, т. е.

$$(p^*, x_i^*) \leqslant (p^*, b_i) + \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}(p^*, y_j^*); \tag{2.22}$$

здесь мы положили

$$y^* = b + y_1^* + y_2^* + \ldots + y_m^*, \; y_k^* \in \Psi_k(p^*).$$

Суммируя неравенства (2.22) и учитывая, что $\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1$, имеем

$$(p^*, x^*) \leqslant (p^*, y^*) \text{ (закон Вальраса в широком смысле).} \tag{2.23}$$

Другими словами, $(p^*, v^*) \geqslant 0$. Но из (2.21) в таком случае вытекает, что $(p, v^*) \geqslant 0$ для любого $p \in S$. Это, однако, может быть лишь в случае $v^* \geqslant 0$, т. е. $y^* \geqslant x^*$, что обеспечивает нам выполнение условия (2.19). Убедимся, что для тройки (y^*, x^*, p^*) выполняется закон Вальраса в узком смысле (2.20). В самом деле, если в (2.23) имеет место строгое неравенство, то это означает, что строгое неравенство имеется по крайней мере в одном из соотношений (2.22). В таком случае мы получаем противоречие с ненасыщаемостью потребителя: получается, что при оптимальном для себя x_i^* он потратил не весь свой доход.

Мы доказали основной факт этой части книги.

Теорема 2.1. В модели Эрроу — Дебре существует положение равновесия.

Тот факт, что для модели Эрроу — Дебре удалось установить существование равновесия, удовлетворяющего закону Вальраса в узком смысле, определяется двумя моментами. Первое — мы считаем каждого потребителя ненасыщаемым, второе — наша экономика в некотором смысле замкнута, что определяется требованием $\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Другими словами, весь доход производственного сектора распределяется между потребителями, т. е. остается внутри системы, а те опять-таки в силу ненасыщаемости тут же пускают его в оборот.

Существуют тесные и интересные связи между понятиями равновесия в модели Вальраса и различными понятиями решения в кооперативной игре многих лиц, которую можно естественным образом связать с этой моделью. Однако мы не имеем возможности остановиться на этом подробно и отсылаем читателя к Никайдо [2, гл. V, § 17].

§ 3. Модель Вальда—Касселя

Опишем еще одну из моделей равновесия, являющуюся частным случаем общей модели Вальраса. Данная модель близка к моделям, рассматриваемым Вальдом в [26, 27] еще в тридцатых годах нашего столетия. Позднее ее исследовал Кассель.

В силу специфики производственного сектора в данной модели нам придется различать в множестве товаров продукты производства и первичные факторы. Имеется m видов первичных факторов, являющихся собственностью потребителей, и n видов продуктов производства. Пусть совокупный запас первичных факторов описывается m-мерным вектором $b>0$. Производственный сектор описывается линейной моделью Леонтьева с матрицей $A=(a_{ij})$, $i=1, 2, ..., n$; $j=1, 2, ..., m$, где $a_{ij}\geqslant 0$ — количество j-того фактора, необходимого для производства одной единицы i-того продукта. Считаем, как мы это уже делали, что в матрице A нет нулевых столбцов и нулевых строк.

Если $z=(z_1, z_2, ..., z_n)$ — вектор интенсивностей работы производственного сектора, то совокупное предложение производственного сектора описывается также вектором z.

Обозначим вектор цен на продукты через $p=(p_1, p_2, ..., p_n)$, на первичные факторы через $v=(v_1, v_2, ..., v_m)$. Тогда вектор цен на товары, обращающиеся в нашей экономике, обозначим $(p; v)$.

Считаем, что поведение потребительского сектора определяется функцией совокупного спроса $\Phi(p, v)$, которую в данном случае будем считать однозначной, $\Phi(p, v)=\{\Phi_1(p, v), ..., \Phi_n(p, v)\}$, где $\Phi_i(p, v)$ — функция спроса для i-того продукта.

Будем также предполагать, что функция $\Phi(p, v)$ удовлетворяет закону Вальраса в узком смысле: $(p, \Phi(p, v))\equiv(v, b)$.

Дополнительно к общим условиям (2.17) — (2.20) относительно конкурентного равновесия потребуем, чтобы спрос на всякий товар в точности совпадал с его предложением. В частности, это означает, что производственный сектор приобретает весь вектор b запасов первичных факторов. Следовательно, доходы этого сектора при ценах $(p; v)$ равны $(p, z)-(v, b)$, где (v, b) — константа. Поэтому оптимальное поведение производственного сектора состоит в максимизации числа (p, z) при ограничениях $zA \leqslant b$, $z \geqslant 0$. Кроме того, условие (2.19) превращается в равенство, что делает лишним условие (2.20).

Набор $(z, (p; v))$ является конкурентным равновесием в рассматриваемой модели, если:

а) вектор z является решением следующей стандартной задачи линейного программирования:

$$\begin{gathered} \max\,(p, z), \\ zA \leqslant b, \\ z \geqslant 0, \end{gathered} \tag{I}$$

описывающей поведение производственного сектора;

б) $$z = \Phi(p, v) \tag{2.24}$$

— условие, описывающее поведение потребительского сектора.

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче I:

$$\begin{gathered} \min\,(v, b), \\ Av \geqslant p, \\ v \geqslant 0. \end{gathered} \tag{II}$$

Нетрудно увидеть ее содержательный смысл: цены v должны быть таковы, чтобы минимизировать расходы (v, b) производственного сектора и вместе с тем не позволить ему иметь положительную прибыль.

Как обычно, функция спроса $\Phi(p, v)$ предполагается непрерывной.

Теорема 2.2. Для нашей модели существует конкурентное равновесие $(z, (p; v))$, причем вектор v является решением задачи II.

Доказательство. Из условия $b > 0$, $A \geqslant 0$ и того факта, что в матрице A нет нулевых строк, легко вытекает, что задачи I и II допустимы при любом $p \in \mathbf{R}_+^n$.

Воспользовавшись теоремой двойственности, получаем, что они обе имеют решение z и v соответственно. Основное затруднение состоит в том, что условие (2.24) для векторов z, p, v может не выполняться. Введем в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ норму следующим образом. Обозначим $e=(1, 1, ..., 1)\in\mathbf{R}^n$. Поскольку в матрице A нет нулевых столбцов, то вектор $a=eA\in\mathbf{R}^m$ положителен. Для $p\in\mathbf{R}^n$ и $v\in\mathbf{R}^m$ положим $\|p\|=(|p|, e)$, $\|v\|=(|v|, a)$. В дальнейшем нам придется иметь дело только с неотрицательными векторами, поэтому знак модуля будем опускать.

Мы собираемся доказывать существование равновесия в модели Вальраса — Касселя вновь ссылкой на теорему Какутани. Здесь, однако, нам придется соблюдать осторожность, поскольку функция спроса $\Phi(p, v)$ в данном случае специфична — она зависит от двух явно выделенных параметров. В частности, она определена лишь при ненулевых векторах p. Поэтому при конструировании компакта в пространстве $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$, к которому будет применяться теорема о неподвижной точке, об этом обстоятельстве нельзя забывать — множество цен p следует отделить от 0.

Пусть

$$\beta=\sum_{i=1}^{n} b_i>0,\quad \alpha=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

Поскольку в матрице A нет нулевых строк, то $\alpha>0$. Кроме того, пусть $\gamma>0$ таково, что $b\geqslant\gamma a$. Обозначим $\mu=\alpha\gamma/\beta$. Очевидно, $\mu\leqslant 1$. Будем рассматривать векторы $s=(p; v)$, принадлежащие множеству

$$S=\{(p; v)\,|\,p\in\mathbf{R}^n_+,\ v\in\mathbf{R}^m_+,\ \mu\leqslant\|p\|\leqslant 1,\ \|v\|=1\}.$$

Заметим, что множество S выпукло и компактно в пространстве $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$. Основное содержание доказательства теоремы 2.2 будет сводиться к построению некоторого многозначного отображения φ множества S в себя.

Пусть $s\in S$. Зададим отображение $\mathbf{Z}: S\to\mathbf{R}^n_+$ формулой $s\mathbf{Z}=b//\Phi(s)A)\Phi(s)$. Отметим, что вектор $\Phi(s)\in\mathbf{R}^n_+$ — . не нулевой. В самом деле, если $\Phi(s)=0$, то, используя закон Вальраса в узкой форме, получаем $v=0$, что невозможно при $s \in S$. Тогда вектор $\Phi(s)A$ также не нулевой, поскольку в матрице A нет нулевых строк. Следовательно, отображение $\mathbf{Z}$ определено для всех $s \in S$. Заметим сразу же, что оно непрерывно на S. По построению вектор $s\mathbf{Z}$ удовлетворяет неравенству $(s\mathbf{Z})A \leqslant b$, причем хотя бы в одной компоненте имеет место равенство, т. е. $b // (s\mathbf{Z})A = 1$.

Определение. Назовем вектор z, допустимый для задачи I, эффективным, если $b // zA = 1$.

Лемма 2.3. Для эффективного вектора z существует вектор $p \in \mathbf{R}^n_+$, $p \neq 0$, такой, что z является решением задачи I.

Утверждение леммы очевидно, поскольку в качестве вектора p можно взять столбец a^j матрицы A, для которого $(z, a^j) = b_j$. Если обозначить множество всех эффективных векторов задачи I через Ω, то ясно, что $\mathbf{Z}$ есть отображение множества S в Ω. Как нетрудно видеть, Ω — есть передняя поверхность многогранника $zA \leqslant b$, $z \geqslant 0$.

Построим теперь отображение $\mathbf{P}: \Omega \to \mathbf{R}^n_+$, сопоставив всякому вектору $z \in \Omega$ множество $z\mathbf{P}$ всех векторов $p \in \mathbf{R}^n_+$, существование которых утверждается леммой 2.3. Очевидно, что множество $z\mathbf{P}$ при каждом фиксированном $z \in \Omega$ является конусом, т. е. если $p \in z\mathbf{P}$, то $\lambda p \in z\mathbf{P}$ при $\lambda \geqslant 0$.

Следующее отображение $\mathbf{V}: \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^m_+$ сопоставляет любому $p \in \mathbf{R}^n_+$ множество $p\mathbf{V}$ решений задачи II.

Используя вспомогательные отображения $\mathbf{P}$ и $\mathbf{V}$, определим отображение $\mathbf{K}: \Omega \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ по формуле: для любого $z \in \Omega$

$$z\mathbf{K} = \{(p; v) \mid p \in z\mathbf{P},\ v \in p\mathbf{V}\}.$$

Из леммы 2.3 и факта существования решения задачи II при любом $p \geqslant 0$ вытекает, что множество $z\mathbf{K}$ содержит не только ноль при любом $z \in \Omega$. Ясно также, что $z\mathbf{K}$ является конусом в пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. В самом деле, пусть $s = (p;\ v) \in z\mathbf{K}$, $\lambda \geqslant 0$. Рассмотрим вектор $\lambda s = (\lambda p;\ \lambda v)$. Как уже отмечалось, $\lambda p \in z\mathbf{P}$. Вектор λv допустим для задачи II, где в качестве вектора p фигурирует вектор λp: $Av \geqslant p \to A(\lambda v) \geqslant \lambda p$. Кроме того, поскольку $(z, p) = (b, v)$, то $(z, \lambda p) = (b, \lambda v)$. Из теории двойственности в линейном программировании заключаем, что вектор λv является решением задачи II при $p=\lambda p$, т. е. $\lambda v \in (\lambda p)\mathbf{V}$. Следовательно, $\lambda s \in z\mathbf{K}$.

Лемма 2.4. Множество $z\mathbf{K} \cap S$ содержит ненулевой вектор при любом $z \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $s \in z\mathbf{K}$, $s \neq 0$, $s=(p;\ v)$. Рассмотрим вектор $\tilde{s}=s/\|v\|$ (заметим, что если $v=0$, то так как $Av \geqslant p$, то и $p=0$, что невозможно, поскольку $s \neq 0$). Поскольку $z\mathbf{K}$ — конус, то $\tilde{s} \in z\mathbf{K}$. Пусть $\tilde{s}=(\tilde{p}, \tilde{v})$, где $\|\tilde{v}\|=1$. Из того, что $\tilde{s} \in z\mathbf{K}$, можно, в частности, заключить, что $A\tilde{v} \geqslant \tilde{p}$. Умножая это неравенство скалярно на вектор $e>0$, задающий норму в R^n_+, получаем $(A\tilde{v}, e) \geqslant (\tilde{p}, e)$ или $(\tilde{v}, a) \geqslant (\tilde{p}, e)$. Следовательно, $1=\|\tilde{v}\| \geqslant \|\tilde{p}\|$. Покажем, что $\|\tilde{p}\| \geqslant \mu$. Для этого вначале заметим, что если $z \in \Omega$, то $\|z\| = \sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant \beta/\alpha$.

В самом деле, по определению Ω имеем, в частности, $(z, a^j) \leqslant b_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, где a^j обозначает j-тый столбец матрицы A. Складывая эти неравенства, имеем $(z, a) \leqslant \beta$. Заменяя каждую координату вектора a на минимальную, обозначенную ранее α, получаем $\alpha \sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant \beta$.

Воспользуемся еще раз теоремой двойственности в линейном программировании, которая утверждает, что имеет место равенство $(\tilde{p}, z)=(\tilde{v}, b)$. Поскольку $(\tilde{p}, z) \leqslant \|\tilde{p}\|\ \|z\|$, то $\|\tilde{p}\| \geqslant (\tilde{v}, b)/\|z\| \geqslant (\tilde{v}, b)\alpha/\beta$. Вспоминая определение числа γ, имеем $(\tilde{v}, b) \geqslant \gamma(\tilde{v}, a)=\gamma\|\tilde{v}\|$. Таким образом, $\|\tilde{p}\| \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\gamma\|\tilde{v}\|$ и $\|\tilde{p}\| \geqslant \mu$. Следовательно, $\tilde{s} \in S$, $\tilde{s} \in z\mathbf{K} \cap S$. Наконец, отображение $\varphi : S \longrightarrow S$ зададим по формуле

$$s\varphi = (s\mathbf{Z})\mathbf{K} \cap S.$$

Чтобы иметь возможность применить теорему Какутани, мы собираемся доказать полунепрерывность сверху отображения φ. Как уже отмечалось, однозначное отображение $\mathbf{Z}$ непрерывно.

Лемма 2.5. Отображение $\mathbf{P}$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0,\ z_k \in \Omega,\ k=1, 2, \ldots;\ \lim_{k\to\infty} p_k = p_0,\ p_k \in z_k\mathbf{P}.$$

Поскольку множество Ω замкнуто, то $z_0 \in \Omega$, в частности, z_0 — допустимый вектор задачи I. Поскольку $(p_k, z_k) \geqslant (p_k, z)$ для любого допустимого вектора z, $k=1, 2, \ldots$, то переходя в этом неравенстве к пределу, имеем $(p_0, z_0) \geqslant (p_0, z)$. Следовательно, $p_0 \in z_0\mathbf{P}$ и лемма доказана.

Полунепрерывность сверху отображения $\mathbf{V}$ доказывается так же, как лемма В.1. Нетрудно показать, (это мы оставляем читателю), что отображение $\mathbf{K}$ также полунепрерывно сверху.

Лемма 2.6. Отображение $\mathbf{ZK}: S \longrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s_0$, $s_k \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$, $t_k \in s_k\mathbf{ZK}$. Надо показать, что

$t_0 \in s_0\mathbf{ZK}$. Пусть $y_k \in s_k\mathbf{Z}$ такой элемент, что $t_k \in y_k\mathbf{K}$, $k=1, 2, \ldots$. Поскольку множество $S\mathbf{Z}$ как образ компакта при непрерывном отображении $\mathbf{Z}$ есть компакт, то из последовательности y можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Мы будем считать, что сама последовательность y_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0$. Поскольку отображение $\mathbf{K}$ полунепрерывно сверху, то $t_0 \in y_0\mathbf{K}$. Из непрерывности отображения $\mathbf{Z}$ следует, что $y_0 \in s_0\mathbf{Z}$. Таким образом, $t_0 \in s_0\mathbf{ZK}$. В таком случае очевидно, что и отображение $\varphi: S \longrightarrow S$ полунепрерывно сверху.

Осталось лишь проверить, что множество $s\varphi$ непусто, выпукло и замкнуто при любом $s \in S$. Непустота $s\varphi$ следует из леммы 2.2. Замкнутость $s\varphi$ непосредственно следует из полунепрерывности сверху отображения φ. Для доказательства выпуклости множества $s\varphi$ достаточно убедиться в выпуклости множества $s\mathbf{ZK}$, что, в свою очередь, легко следует, если показать, что множества $s\mathbf{ZP}$ и $p\mathbf{V}$ выпуклы. Факт выпуклости множества $p\mathbf{V}$ при любом p не вызывает сомнений. Покажем, что множество $z\mathbf{P}$ выпукло при любом $z \in \Omega$.

Пусть $p_1, p_2 \in z\mathbf{P}$. Это значит, что $(p_i, z) \geqslant (p_i, z')$ для любого допустимого для задачи I вектора z', $i=1, 2$. Но тогда $(\alpha p_1 + \beta p_2, z) \geqslant (\alpha p_1 + \beta p_2, z')$ при любых $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Это означает, что $\alpha p_1 + \beta p_2 \in z\mathbf{P}$, т. е. множество $z\mathbf{P}$ выпукло.

Воспользовавшись теоремой Какутани о неподвижной точке, мы можем утверждать существование таких цен $s^* = (p^*; v^*) \in S$, что $s^* \in s^* \varphi$.

Покажем, что тройка $(z^*, (p^*; v^*))$, где $z^* = \Phi(s^*)$, удовлетворяет условиям равновесия нашей модели. В самом деле, поскольку $s^* \in s^* \varphi$, то $s^* \in s^* \mathbf{Z} \mathrm{K}$. Вообще, если $s^* \in z\mathrm{K}$ при некотором z, то вектор z является решением задачи I при $p = p^*$, а вектор v^* — решением задачи II при $p = p^*$. В частности, выполняется равенство $(z, p^*) = (v^*, b)$. Поскольку в нашем случае $z = s^* \mathbf{Z} = \mu \Phi(s^*)$ при некотором $\mu > 0$. $(\mu = b / / \Phi(s^*) A)$, то имеем $(\mu \Phi(s^*), p^*) = (v^*, b)$. Обращаясь вновь к закону Вальраса, получаем $\mu = 1$. Следовательно, тройка векторов $z^* = \Phi(s^*)$, $(p^*; v^*)$ удовлетворяет условиям а) и б) в определении равновесия, что заканчивает доказательство теоремы 2.2.

Отметим, что мы нигде не пользовались однородностью функции спроса $\Phi(p, v)$, ограничиваясь применением закона Вальраса в узкой форме.

§ 4. Некоторые свойства конкурентного равновесия

Выше нами была приведена теорема 2.1, утверждающая существование конкурентного равновесия в общей модели Вальраса при некоторых предположениях. Нетрудно понять, что может существовать несколько положений равновесия. Более определенные факты на этот счет, касающиеся специального случая модели Вальраса — модели чистого обмена, — можно найти, например, в [31].

Важность с теоретической точки зрения факта наличия положений равновесия является побудительным мотивом для изучения различных их свойств. Не имея возможности осветить этот вопрос достаточно полно, остановимся на двух проблемах, связанных со свойствами конкурентного равновесия.

Во многих абстрактных построениях, изучающих процесс распределения ограниченных ресурсов, в таких, как теория игр, теория многокритериальной оптимизации и т. д., одним из важнейших понятий является оптимальность по Парето. В достаточно общей форме это понятие формулируется следующим образом.

Пусть, как и раньше, имеется l потребителей; X_i, $i=1, 2, \ldots, l$, обозначает множество, на котором определена функция полезности $u_i(x)$ i-того потребителя. $X=\prod_{i=1}^{l} X_i$ — декартово произведение множеств X_i.

Кроме того, пусть в множестве X выделено некоторое подмножество $X_0 \subseteq X$, которое мы назовем множеством допустимости. Набор векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, где $x_i \in X_i$, $i=1, 2, \ldots, l$, назовем допустимым, или распределением, если $x \in X_0$.

Определение. Распределение $x=(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ назовем оптимальным по Парето, если не существует распределения $x'=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_l)$, для которого $u_i(x'_i) \geqslant u_i(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, l$, причем хотя бы для одного потребителя имеет место строгое неравенство.

Содержательный смысл понятия оптимальности по Парето нагляден: хорошо делать так, чтобы кому-нибудь стало лучше, если при этом никому из остальных не становится хуже.

Проиллюстрировать возможные интерпретации множества X_0 нам проще всего на примере модели Вальраса. Рассмотрим множество $b+Y$, где Y — совокупное технологическое множество, b — совокупный начальный запас. Тогда $b+Y$ представляет собой множество всех наборов товаров, которые только могут быть произведены в нашей производственной системе. Основным требованием, обеспечивающим возможность функционирования экономики, описываемой моделью Вальраса, является требование, чтобы спрос не превышал предложения. Ясно, что невозможно никакое распределение, при котором суммарный объем распределяемого продукта больше, чем объем, который в принципе может быть произведен. Поэтому для модели Вальраса множество допустимости X_0 имеет вид:

$$X_0=\left\{x \mid x=(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in X,\ \exists y \in Y,\ \sum_{i=1}^{l} x_i \leqslant b+y\right\}. \tag{2.25}$$

Один из факторов, связывающих понятие конкурентного равновесия и оптимальности по Парето, таков.

Теорема 2.3. Если $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*, p^*)$ — конкурентное равновесие в модели Эрроу — Дебре, то распределение $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$ — оптимально по Парето.

Доказательство. Допустим, что найдется распределение $(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in X_0$, для которого $u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)$, $i=1, 2, \ldots, l$, причем хотя бы одно из неравенств (скажем, при $i=i_0$) является строгим. Поскольку каждый потребитель ненасыщаем, то найдется элемент $w_i \in X_i$ такой, что $u_i(w_i) > u_i(x_i)$. Положим $x_i(t) = (1-t)x_i + tw_i$, $i=1, 2, \ldots, l$. В силу **вогнутости** функции полезности u_i имеем $u_i(x_i(t)) \geqslant (1-t)u_i(x_i) + tu_i(w_i) > u_i(x_i)$ при $0 < t \leqslant 1$. Отсюда получаем $u_i(x_i(t)) > u_i(x_i^*)$, $i=1, 2, \ldots, l$ при $0 < t \leqslant 1$. Из того, что значение $u_i(x_i^*)$ является максимально возможным для i-того потребителя в силу его бюджетных ограничений $(x_i^* \in \widehat{X}_i)$ и при данном выборе $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ производителей, полученное неравенство означает, что $x_i(t) \notin \widehat{X}_i$, другими словами

$$(p^*, x_i(t)) > (p^*, b_i) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(p^*, y_j^*).$$

Переходя к пределу при $t \to 0$ имеем

$$(p^*, x_i) \geqslant (p^*, b_i) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(p^*, y_j^*). \tag{2.26}$$

Отметим, что по крайней мере одно из неравенств (2.26), именно при $i=i_0$, строгое. Суммируя неравенства (2.26) с учетом того, что $\sum_{i=1}^{l} a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, получаем

$$\left(p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i\right) > (p^*, b) + \left(p^*, \sum_{j=1}^{m} y_j^*\right). \tag{2.27}$$

Поскольку вектор $y^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^*$ представляет собой оптимальный выбор производственного сектора при ценах p^*, то $\left(p^*, \sum_{j=1}^{m} y_j^*\right) \geqslant (p^*, y)$, где $y \in Y$ — произвольный вектор. Тогда из (2.27) следует

$$\left(p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i\right) > (p^*, b + y). \tag{2.28}$$

Вместе с тем так как набор $(x_1, x_2, ..., x_l)$ является распределением, то он удовлетворяет неравенству $\sum_{i=1}^{l} x_i \leqslant b + y$ для некоторого $y \in Y$. Умножая данное неравенство скалярно на $p^* \geqslant 0$, получаем противоречие с (2.28), которое и доказывает теорему.

Еще более интересен факт, показывающий, что всякое оптимальное по Парето распределение в некотором смысле может участвовать в конкурентном равновесии.

Теорема 2.4. Пусть распределение $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$ оптимально по Парето. Тогда существует вектор цен p^* и набор

$$(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*), \quad y_j^* \in Y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

такие, что

1) $\sum_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant b + \sum_{j=1}^{m} y_j^*$;

2) вектор y_j^* максимизирует (p^*, y_j) по всем $y_j \in Y_j$, $j = 1, 2, ..., m$;

3) вектор x_i^* минимизирует (p, x_i) по всем $x_i \in X_i$ таким, что $u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)$.

Доказательство. Утверждение 1) тривиально. Положим

$$M_i = \{x_i \mid x_i \in X_i, \ u_i(x_i) > u_i(x_i^*)\}, \ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Поскольку потребители ненасыщаемы, то $M_i \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $G = b + Y - \sum_{i=1}^{l} M_i$. Нетрудно убедиться, что множество G не содержит положительных векторов. Действительно, если вектор $z \geqslant 0$ принадлежит G, то

$$z = b + y - \sum_{i=1}^{l} x_i > 0, \text{ где } y \in Y,\ x_i \in M_i.$$

Данное неравенство означает, что набор $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ допустим, т. е. является распределением, а из определения множеств M_i вытекает, что он является лучшим распределением, чем $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$, что противоречит оптимальности по Парето последнего.

Поскольку множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, и Y выпуклы, а все функции u_i вогнуты, то множества M_i, $i = 1, 2, \ldots, i$, и, следовательно, множество G также выпуклы. Применяя лемму об отделимости выпуклых множеств (см. аналогичное утверждение в математическом введении к ч. I), получаем, что существует неотрицательный вектор $p \geqslant 0$ такой, что $(p^*, z) \leqslant 0$ для всех $z \in G$. Поэтому для всех $x_i \in M_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и всех $y_j \in Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} (p^*, b_i) + \sum_{j=1}^{m} (p^*, y_j) \leqslant \sum_{i=1}^{l} (p^*, x_i). \qquad (2.29)$$

Нетрудно показать, что это же неравенство выполняется и для любого набора $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $\bar{M}_i = \{x_i \mid x_i \in X_i,\ u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)\}$ — замыкание множества M_i. Действительно, пусть $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$, $x_i \in M_i$. Положим $x_i(t) = (1-t)\bar{x}_i + t x_i$, $0 < t \leqslant 1$. В силу вогнутости функции u_i имеем $x_i(t) \in M_i$ и, следовательно, неравенство (2.29) остается справедливым при замене всех x_i на $x_i(t)$. Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем требуемое.

Вспомним теперь, что набор $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$ представляет собой распределение. Следовательно, существует

$$y^* \in Y,\ y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_m^*, \text{где } y_j^* \in Y_j,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

для которого

$$\sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} y_j^* \geqslant \sum_{i=1}^{l} x_i^*. \tag{2.30}$$

Умножая (2.30) скалярно на p^*, получаем неравенство, противоположное (2.29). Поскольку

$$x_i^* \in \bar{M}_i,\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

и для них, как было показано, (2.29) выполняется, то

$$\sum_{i=1}^{l} (p^*, b_i) + \sum_{j=1}^{m} (p^*, y_j^*) = \sum_{i=1}^{l} (p^*, x_i^*).$$

Из этого соотношения и (2.29) получаем

$$\sum_{j=1}^{m} (p^*, y_j) - \sum_{j=1}^{m} (p^*, y_j^*) \leqslant \sum_{i=1}^{l} (p^*, x_i) - \sum_{i=1}^{l} (p^*, x_i^*)$$

для любых $x_i \in \bar{M}_i$, $y_j \in Y_j$.

Теперь утверждение 2) получается, если в этом неравенстве положить $x_i = x_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, l, y_j = y_j^*$ для всех j, кроме одного. Аналогично можно получить утверждение 3) теоремы.

Дополнительно к утверждениям теоремы 2.4 можно было бы показать, как это сделано в работе Дебре [28], что построенный в этой теореме набор $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*; y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*; p^*)$ является конкурентным равновесием, если произвести перераспределение долей участия в прибылях таким образом, чтобы $\alpha_{ij} = 1/l$, и перераспределение начальной собственности с тем, чтобы новая начальная собственность i-того потребителя была равна $b_i' = x_i^* - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{m} y_j^*$.

В качестве комментария к этому факту приведем цитату из книги Никайдо [2, с. 365]: «Сторонники экономической теории благосостояния... придают большое значение теореме (Теорема 2.4. в наших обозначениях.— *С. А.*) и ей подобным утверждениям, полагая, что ими обосновывается достижимость оптимальных по Парето распределений с помощью конкурентного механизма цен. Однако совершенно неясно, действительно ли такие распределения могут быть реализованы чисто конкурентным способом, ведь при этом предполагается перераспределение начальной собственности и надлежащее распределение прибылей, и нет никакой гарантии, что они осуществятся под воздействием конкурентного механизма. Некоторые оптимальные по Парето распределения могут оказаться неосуществимыми с помощью механизма конкуренции, если индивидуальные участники системы будут удерживать свои исторически сложившиеся привилегии — начальную собственность и доли участия в прибылях. Поэтому надо признать, что хотя понятие оптимальности по Парето может оказаться плодотворным при выработке линии поведения планирующего органа, стремящегося придать более «конкурентный» и децентрализованный характер функционированию экономики, это понятие все-таки недостаточно отражает подлинную сущность конкуренции в так называемой частнособственнической экономике».

Яснее не скажешь — целью функционирования капиталистической экономики отнюдь не является «всеобщее благосостояние», как буржуазные ученые называют оптимальность по Парето.

С точки зрения математической экономики состояние равновесия является необходимым условием стабильности, нормального функционирования экономики. Вместе с тем, как следует из доказанных нами фактов о конкурентном равновесии, оно не может быть достигнуто автоматически путем несогласованных действий каждого участника в его собственных интересах. Сам Вальрас считал, что в рыночной (капиталистической) экономике в роли регулятора, согласовывающего действия всех участников и устанавливающего равновесные цены, выступает рынок. Для пояснения Вальрас рисовал следующую картину. Он предлагал вместо абстрактного, неодушевленного понятия «рынок» мыслить его в виде человека-аукционера, распоряжающегося на реальном рынке. Этот аукционер вначале назначает произвольные цены на товары, после чего участники рынка совершают условные сделки и сообщают об их результате аукционеру. Если спрос на некоторый товар оказался больше (меньше) предложения, то аукционер меняет первоначальные цены, поднимая (понижая) цену этого товара. Окончательные сделки совершаются лишь после достижения равновесия. Назвав этот процесс «нащупыванием» (tâtonnement), Вальрас считал, что он приводит к цели. С современной точки зрения ясно, что для этого необходимо, чтобы состояние равновесия было глобально устойчивым. Можно потребовать и локальной устойчивости равновесия, однако при этом придется заботиться о надлежащем выборе начального вектора цен. Проблеме устойчивости состояний равновесия также посвящено большое количество работ. Мы приводим ниже чисто иллюстративную «паутинообразную» модель. Отметим, что хотя с точки зрения обоснования возможности достижения равновесного состояния с помощью рынка все подобные модели сомнительны, тем не менее некоторые из них представляют несомненный интерес как вычислительный алгоритм для определения равновесия.

Перейдем к изложению «паутинообразной» модели. Будем считать, что на рынке фигурирует всего один продукт, спрос и предложение которого характеризуются функциями совокупного спроса $\Phi(p)$ и совокупного предложения $\Psi(p)$. Поскольку речь идет о единственном товаре, то эти функции естественно считать однозначными. Наложим требования: они непрерывны, определены при всех $p>0$, $\Phi(p)$ монотонно убывает, $\Psi(p)$ — возрастает, $\lim\limits_{p\to 0}\Phi(p)=\infty$, $\lim\limits_{p\to\infty}\Phi(p)=0$, $\lim\limits_{p\to 0}\Psi(p)=0$.

Поскольку речь идет о рынке единственного товара, то в состоянии равновесия $p\neq 0$, и, следовательно, это состояние характеризуется равенством $\Phi(p)=\Psi(p)$. В силу условий на функции Φ и Ψ данное уравнение имеет единственное решение p^*, так что тройка (p^*, x^*, y^*), где $x^*=\Phi(p^*)=\Psi(p^*)=y^*$, является единственным состоянием равновесия.

Опишем один из вариантов процесса «нащупывания» для нашей модели.

Пусть в начальный момент времени на товар была назначена цена p_0. Если спрос больше предложения, т. е. $\Phi(p_0)>\Psi(p_0)$, то цена увеличивается до величины p_1 так, чтобы $\Phi(p_1)=\Psi(p_0)$, т. е. чтобы спрос в следующем периоде понизился до величины предложения в данном периоде. Если спрос меньше предложения, т. е. $\Phi(p_0)<\Psi(p_0)$, то цена понижается с тем, чтобы спрос повысился до величины предложения. Разностное уравнение, описывающее этот процесс, таково:

$$\Phi(p_t) = \Psi(p_{t-1}).$$

Иллюстрацией данного процесса служит рис. 1. Очевидно, что указанный процесс дает последовательность цен p_t, сходящуюся к равновесным ценам p^*.

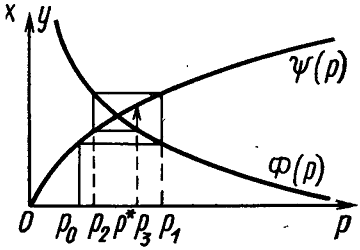

Рис. 1

Задачи

1. Пусть $\varphi: X \to Y$—однозначное отображение, полунепрерывное сверху. Показать, что если Y не является компактом, то φ не обязано быть непрерывным.

2. Показать, что отображение $\psi: X \longrightarrow Y$, $\psi(x) = \{y \mid F(x, y) \leqslant 0\}$, где функция F непрерывна, является полунепрерывным сверху.

3. Доказать лемму В.3.

4. Пусть X, Y, Z — компакты, $\varphi: X \longrightarrow Y$, $\psi: Y \longrightarrow Z$— полунепрерывные сверху отображения. Доказать, что композиция этих отображений $\varphi\psi: X \longrightarrow Z$ полунепрерывна сверху.

5. Показать, что функция $f(x)$ одного переменного вогнута тогда и только тогда, когда

$$f(x) \geqslant f(x')\frac{x-x''}{x'-x''} + f(x'')\frac{x'-x}{x'-x''}$$

для любого x, $x'' \leqslant x \leqslant x'$.

6. Доказать, что дифференцируемая функция одного переменного $f(x)$ вогнута тогда и только тогда, когда $f'(x)$ является неубывающей функцией. Указание: воспользоваться тождеством

$$f(x) = \frac{x-x''}{x'-x''}f(x) + \frac{x'-x}{x'-x''}f(x)$$

и предыдущей задачей.

7. Доказать, что функции $y = \ln x$, $y = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, — вогнуты.

8. Пусть $u(x)$ — неоклассическая функция полезности (см. гл. 1, § 3), $x^*(p, K)$ — соответствующая функция спроса. Определим косвенную функцию полезности $u^*(p, K)$ равенством $u^*(p, K) = u(x^*(p, K))$. Показать, что косвенная функция полезности возрастает по переменной K и убывает по переменной p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Указание. Вначале доказать неравенство $\partial u^*/\partial K > 0$, воспользовавшись (2.3), (2.10) и отрицательной определенностью матрицы U^{-1}. Для доказательства неравенства $\partial u^*/\partial p_i > 0$ воспользоваться уравнением Слуцкого (2.11).

9. Пусть $f(p, K)$ — произвольная неотрицательная вектор-функция, удовлетворяющая условию $(p, f(p, K)) = K$. Будем интерпретировать $f(p, K)$ как функцию спроса потребителя, обладающего капиталом K при ценах p. Пусть $x_1 = f(p_1, K_1)$, $x_2 = f(p_2, K_2)$. Набор товаров x_1 выявленно предпочитается набору x_2, если $x_1 \neq x_2$ и $(p_1, x_1) \geqslant (p_1, x_2)$. Говорят, что функция спроса $f(p, K)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения, если из того, что x_1 выявленно предпочитается набору x_2, вытекает неравенство $(p_2, x_1) > (p_2, x_2)$.

Дать содержательную интерпретацию этой аксиоме и показать, что неоклассическая функция спроса $x^*(p, K)$ (см. гл. 1, § 3) удовлетворяет аксиоме выявленного предпочтения.

10. Доказать, что если функция спроса $f(p, K)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения, то она положительно-однородна нулевой степени, т. е. $f(\lambda p, \lambda K) = f(p, K)$ для всех $\lambda > 0$.

11. В модели Эрроу — Дебре доказать полунепрерывность сверху отображения $\Psi(x)$.

12. Пусть в неоклассической задаче потребления

$$\max u(x),$$
$$(x, p) \leqslant K,$$
$$x \geqslant 0,$$

функция полезности непрерывна и вогнута, $p \geqslant 0$, $K > 0$. Верно ли, что эта задача либо имеет решение при всяком $K > 0$, либо не имеет решения при всех $K > 0$?

Указание: рассмотреть функцию $u(x_1, x_2)=\min\{1, x_2-1/(1+x_1)\}$. Если потребовать ненасыщаемости потребителя, то следует рассмотреть функцию $u_0(x_1, x_2)=u(x_1, x_2)+x_2$ (А. В. Тимохов).

13. Пусть $K(p)=\sum_{i=1}^{l} K_i(p)$ — совокупный доход потребительского сектора. Считаем, что всякий потребитель ненасыщаем. Показать, что для всех $p\geqslant 0$ имеет место равенство $(p, x)=K(p)$ для всех $x\in\Phi(p)$, где $\Phi(p)$ — функция совокупного спроса.

14. Обозначим через $E(p)$ множество $E(p)=\Phi(p)-\Psi(p)$, где $\Psi(p)$ — функция совокупного предложения, $\Phi(p)$ — функция совокупного спроса в модели Вальраса. $E(p)$ называется функцией избыточного спроса. Показать, что конкурентное равновесие (см. формулы (2.17) — (2.20)) существует тогда и только тогда, когда найдутся p^* и z^* такие, что $z^*\in E(p^*)$ и $z^*\geqslant 0$, $(z^*, p^*)=0$.

Рассмотрим следующую модель типа Эрроу — Дебре (А. В. Тимохов).

Имеется два товара и один потребитель. Технологическое множество Y производственного сектора задается следующим образом: $Y=\{(y_1, y_2)\,|\,0\leqslant y_1\leqslant 1,\ y_2=0\}$. Функция полезности потребителя имеет вид

$$u(x_1, x_2)=x_1+\sqrt{x_2}$$

и определена на множестве $X=\{(x_1, x_2)\,|\,x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_2\leqslant x_1\leqslant 2x_2\}$. Весь доход $p_1y_1+p_2y_2$ производственного сектора поступает в распоряжение потребителя.

15. Проверить, что в данной модели выполнены все условия теоремы Эрроу — Дебре за одним исключением: у потребителя отсутствует начальная собственность.

16. Доказать, что в этой модели не существует конкурентного равновесия.

17. Показать, что если в качестве X взять $\mathbf{R}^n_+$, то равновесие также не существует.

18. Доказать, что множество Ω всех эффективных векторов (см. гл. 2, § 3) замкнуто.

Часть III

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Первая часть книги была посвящена изучению линейных замкнутых моделей производства — моделей Леонтьева, Неймана, Гейла. Оба из упомянутых свойств этих моделей — линейность и замкнутость — налагают определенные ограничения на круг изучаемых экономических явлений и на способность модели адекватно отражать действительность. Наиболее ограничительным предположением является требование линейности. Несомненно, что линейные модели как наиболее простые являются необходимым этапом в процессе моделирования экономической действительности. На их языке, как мы видели, удалось сформулировать некоторые основные экономико-математические понятия и связи между ними, получить интересные качественные выводы о динамике производства.

Переход к нелинейным моделям означает качественный скачок в теории, он не может совершаться гладко и безболезненно, скажем, путем построения нелинейных аналогов линейных моделей (что нетрудно) и обобщения соответствующих результатов (что если и возможно, то очень сложно). Поэтому естественный путь перехода к нелинейным моделям, как нам представляется, таков: отказываясь от линейности, упростить модель в каком-либо другом направлении — скажем, сделать технологическое отображение однозначным, уменьшить число учитываемых производственных факторов и т. д.

Вместе с тем при изучении экономических процессов в современном крупномасштабном производстве бывает чрезвычайно трудно, если не невозможно, собрать необходимую статистику для практического построения модели, скажем типа модели Неймана, учитывающей внутреннюю структуру производства. С другой стороны, зачастую гораздо проще получить отчетные данные о поведении и взаимосвязи укрупненных экономических показателей, таких, как стоимость произведенного продукта, объем основных фондов, численность работников и т. п. Оказывается, что, оперируя даже такими укрупненными показателями и рассматривая производственный объект как «черный ящик» (т. е. изучая лишь связь между затраченными средствами и произведенным продуктом), можно получать определенные содержательные выводы.

Высказанные соображения лежат в основе теории производственных функций.

Математическое введение. Оптимальное управление

Центральную роль при изучении нелинейных экономико-математических моделей играют математические методы оптимального управления и, более конкретно, различные формы принципа максимума как необходимого условия оптимальности. Нам потребуются две теоремы о необходимых условиях оптимальности в задачах управления — принцип максимума Понтрягина для двух задач. Данное математическое введение посвящено постановке и обсуждению задач оптимального управления в подходящей для нас формулировке и изложению без доказательства утверждений соответствующих теорем.

С понятием «управляемого объекта» мы уже встречались. Например, экономика, описываемая моделью Неймана, являлась таким управляемым объектом, причем параметром управления, с помощью которого регулировалось «движение» экономики во времени, являлся вектор интенсивностей. Состояние объекта описывалось вектором выпуска в данный момент времени. На управление — вектор интенсивностей — в каждый момент времени были наложены ограничения — оно должно быть таким, чтобы затраты в данный момент не превосходили объем выпуска в предыдущий.

Математическое описание управляемого объекта в общем случае таково.

Состояние объекта задается в каждый момент времени n-мерным вектором $x \in \mathbf{R}^n$, координаты x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, которого называются фазовыми координатами объекта.

Движение объекта состоит в том, что его координаты зависят от времени и от m величин $u_1, u_2, \ldots, u_m$, называемых управлениями.

Управление u является m-мерным вектором $u=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, в свою очередь, изменяющимся во времени. Однако изменение управляющего параметра u в определенной степени зависит только от управляющего субъекта.

Пусть задано некоторое замкнутое множество $U \leqslant \mathbf{R}^m$. Управление $u(t)$ называется допустимым, если в каждый момент времени t значение $u(t)$ принадлежит множеству U и вектор-функция $u(t)$ является кусочно-непрерывной.

Пусть задано начальное состояние объекта

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

и закон движения в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{I}$$

где функции f_i предполагаются непрерывными по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемыми по x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и по t.

Если теперь задать некоторое допустимое управление $u(t)$, то заданная система дифференциальных уравнений вместе с начальным условием $x(0)=x^0$ однозначно определит траекторию $x(t)$. Задача теории оптимального управления состоит в том, чтобы среди допустимых управлений $u(t)$ выбрать такое, которое бы определяло траекторию $x(t)$, максимизирующую некоторый заданный критерий. В зависимости от вида критерия, подлежащего максимизации, существует много различных типов задач оптимального управления. Среди них задачи экономической динамики выделяются определенной спецификой, связанной с наложением дополнительных ограничений на фазовые координаты: условие неотрицательности, требования на значения переменных в конце промежутка планирования и т. д.

Ниже мы формулируем несколько возможных постановок.

Задача 1. Для ее формулировки нам потребуется еще одно новое для нас понятие — гладкого многообразия.

Гладкое многообразие $M \subseteq \mathbf{R}^n$ размерности $(n-k)$ задается k уравнениями

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где все функции g_i непрерывно дифференцируемы и все векторы

$$\operatorname{grad} g_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right),$$

$i=1, 2, \ldots, k$, линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Например, часто встречаются многообразия, задаваемые уравнениями вида

$$x_1 = \bar{x}_1, \; x_2 = \bar{x}_2, \; \ldots, \; x_k = \bar{x}_k, \; k \leqslant n,$$

где $\bar{x}_i$ — константы.

Будем говорить, что допустимое управление $u(t)$ переводит фазовую точку из положения x^0 на многообразие M, если $x(T) \in M$ для некоторого $T \geqslant 0$.

Задача 1 формулируется следующим образом: среди всех допустимых управлений найти такое, которое переводит фазовую точку из положения x^0 на многообразие M за минимальное время. Для решения этой задачи вводятся новые (двойственные) переменные $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_n(t)$ и строится функция Гамильтона

$$\mathscr{H}(\psi, x, u, t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u, t).$$

Рассмотрим сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Взяв произвольное допустимое управление $u(t)$ и начальное условие x^0, мы из системы (I) можем найти соответствующую траекторию $x(t)$. После этого мы можем найти решение $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_n(t)$ сопряженной системы (II), задав какое-нибудь начальное условие. Естественно, что задавая различные начальные условия, мы получим различные решения.

При фиксированных (постоянных) значениях ψ, x и t функция $\mathscr{H}$ является функцией параметра $u \in U$. Обозначим

$$\mathscr{M}(\psi, x, t) = \max_{u \in U} \mathscr{H}(\psi, x, u, t).$$

Теорема (принцип максимума Понтрягина [32]). Если допустимое управление $u(t)$, переводящее фазовую точку из положения x^0 на многообразие M, оптимально, то существует такое ненулевое решение $(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) = \psi(t)$ сопряженной системы, что выполнены условия:

1) при любом t функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u, t)$ переменного u достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t), t) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t);$$

2) вектор $\psi(T)$ ортогонален всем касательным векторам многообразия M в точке $x(T)$ (условие трансверсальности). Другими словами, вектор $\psi(T)$ является линейной комбинацией векторов $\operatorname{grad} g_i(x(T))$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Задача 2. В этой задаче отрезок времени [0, T] фиксирован заранее.

Пусть задана функция $f_0(x, u, t)$, непрерывная вместе со своими частными производными по совокупности переменных. Среди всех допустимых управлений $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ требуется определить такое, для которого соответствующая фазовая траектория удовлетворяет условию $x(T) \geqslant x^{\mathrm{T}}$ (здесь x^{T} — заданный вектор, $x^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$) и максимизирует функционал

$$\int_0^T f_0(x, u, t)\, dt.$$

Решение этой задачи проводится вполне аналогично предыдущей, со следующими изменениями: функция Гамильтона имеет вид

$$\mathscr{H} = \psi_0 f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u, t).$$

Соответственно, сопряженная система (II) строится именно для такой функции Гамильтона.

Теорема [33]. Оптимальное управление в задаче 2 удовлетворяет необходимому условию 1) принципа максимума Понтрягина. Кроме того, $\psi(T) \geqslant 0$, $(\psi(T), x(T) - x^{\mathrm{T}}) = 0$. При этом ψ_0 не зависит от t и можно считать, что ψ_0 равно либо 0, либо 1. Если $\psi_0 = 0$, то $\psi(t) \neq 0$ при всех t.

Отметим, что принцип максимума Понтрягина дает лишь необходимые условия оптимальности, не отвечая на вопросы существования хотя бы одного допустимого управления решающего задачу достижения заданного многообразия, существования оптимального управления и т. д. Как правило, существование допустимого управления решающего задачу достижения заданного многообразия в задачах экономической динамики очевидно из свойств рассматриваемых функций и содержательных соображений.

Вопрос о выделении с помощью необходимых условий оптимального управления решается обычно таким образом: доказывается, что существует лишь одно допустимое управление, удовлетворяющее этим условиям.

Наконец, проблема существования оптимального управления решается в работах А. Ф. Филиппова [34] и в тех моделях, которые мы будем рассматривать ниже, всякий раз можно с помощью его результатов показать, что оптимальное управление существует. Подробнее, однако, мы на этом останавливаться не будем.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Основные понятия теории производственных функций

Определение производственной функции в самом общем виде отличается от привычного нам понятия технологического отображения лишь требованием однозначности.

Пусть $\mathbf{R}^n_+$ — положительный ортант n-мерного пространства, каждый вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов производства здесь могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, выступающие в данном случае как ресурсы или сырье.

Пусть $\mathbf{R}^m_+$ — положительный ортант m-мерного пространства, каждый вектор $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ которого интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели.

Если **P** — некоторый производственный процесс, то производственной функцией f этого процесса будем называть отображение $f: D \rightarrow V$, где $D \subseteq \mathbf{R}^n_+$, $V \subseteq \mathbf{R}^m$, моделирующее выпуск продукции в процессе **P**.

Введение множеств D, V обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для процесса **P** происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. В этом случае отчетные данные, на основе которых строится функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. При этом может случиться, что удобная аналитическая форма функции f дает хорошие результаты (т. е. достаточно адекватно моделирует процесс **P**) только в пределах некоторых множеств D и V.

Вопрос о практическом построении производственных функций будет несколько более подробно рассмотрен в § 2 данной главы.

Отметим сразу, что, несмотря на широту приведенного выше определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе в основном изучался случай $m=1$, т. е. когда имеется единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию естественно записывать как обычную функцию нескольких переменных

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.1}$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации, рассмотрим двухфакторную производственную функцию. Обозначим через K объем основных фондов, либо в стоимостном выражении, либо в количественном (скажем, число станков). Пусть L — числовое выражение объема трудовых ресурсов, т. е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т. д., Y — объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если мы имеем дело с отраслью, выпускающей один продукт. Тогда производственная функция имеет вид

$$Y = F(K, L). \tag{3.2}$$

Ниже в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций — функцию Кобба — Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \tag{3.3}$$

где $A>0$ — константа, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta=1$. Обычные требования на производственную функцию (3.2) заключаются в требовании гладкости и

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \text{ при } K, L > 0. \tag{3.5}$$

Смысл условий (3.4) ясен: при увеличении объема одного из факторов при неизменном объеме другого выпуск продукции возрастает. Условия (3.5) означают, что при фиксированном объеме одного из факторов последовательное увеличение другого приводит к все меньшим приростам произведенного продукта.

Перейдем к перечислению основных экономико-математических характеристик производственной функции (3.2).

Средняя производительность труда определяется как $y=Y/L$ — отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда. Отметим, что эта характеристика (как и все прочие) является функцией фазовых координат K, L. Средняя фондоотдача: $z=Y/K$ — отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов.

Для функции Кобба — Дугласа, например, средняя производительность труда равна $AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ и в силу условия $\beta<1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение — поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Таким образом, становится ясным и значение такой характеристики, как фондовооруженность труда $k=K/L$, показывающая объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

Наряду со средними показателями при анализе производственных функций играют роль и предельные характеристики функции.

Предельная производительность труда $v=\partial F/\partial L$ характеризует величину дополнительного эффекта от каждой дополнительной единицы затраченного труда в данной точке (K, L) фазовой плоскости. Условие (3.5) показывает, что при неизменных основных фондах при увеличении численности работников предельная производительность труда, аналогично средней, падает.

Для функции Кобба — Дугласа предельная производительность труда равна $\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$. Видно, что для этой функции $\partial F/\partial L=\beta Y/L$, т. е. предельная производительность труда пропорциональна средней производительности и всегда меньше ее $(\beta<1)$.

Предельная фондоотдача определяется аналогично: $r=\partial F/\partial K$.

Заметим, что такие характеристики, как предельная и средняя производительность труда и фондоотдача, являются размерными величинами, связанными с абсолютными приростами. Представляют также интерес величины, характеризующие процент прироста продукции при увеличении затрат ресурса на 1%. Такие показатели именуются коэффициентами эластичности. Коэффициент эластичности по фондам

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}. \qquad (3.6)$$

Поясним формулу (3.6). Пусть приращению ΔK основных фондов при неизменном втором факторе — трудовых ресурсах — соответствует приращение ΔY объема выпуска. Тогда увеличению объема основных фондов на $(\Delta K/K) \cdot 100\%$ соответствует увеличение выпуска на $(\Delta Y/Y) \cdot 100\%$. Следовательно, при увеличении объема основных фондов на 1% объем выпуска увеличится на $\frac{\Delta Y}{\Delta K}\frac{K}{Y}\%$. Переходя к пределу при $\Delta K \to 0$, получаем выражение (3.6).

Коэффициент эластичности по труду $\beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$ носит аналогичный смысл.

Видим, что параметры α и β в формуле (3.3), задающей функцию Кобба — Дугласа, являются как раз коэффициентами эластичности. Таким образом, коэффициенты эластичности по факторам для функции Кобба — Дугласа суть величины постоянные, не зависящие от значений факторов K, L.

Предельная норма замещения S показывает, на сколько единиц нужно уменьшить (увеличить) K при увеличении (уменьшении) L на единицу, чтобы при этом величина Y осталась неизменимой. Взятие полного дифференциала от обеих частей уравнения $Y = F(K, L)$ дает соотношение $S = -dK/dL = (\partial F/\partial L)/(\partial F/\partial K)$.

Вычисляя данный показатель для функции Кобба — Дугласа, имеем $S = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$. Из этой формулы видно, что предельная норма замещения затрат труда производственными фондами для функции Кобба — Дугласа прямо пропорциональна фондовооруженности труда. Этот факт представляется вполне естественным: чем выше фондовооруженность, тем больше требуется фондов для компенсации одной единицы трудовых ресурсов.

С целью более подробно выяснить связь нормы замещения и фондовооруженности для производственной функции вида (3.2) будем рассматривать норму замещения S, являющуюся функцией аргументов K и L, $S=S(K, L)$, как функцию переменных $k=K/L$, L: $S=S(K, L)=S(kL, L)$. Такая запись позволяет ввести новый важный для нас показатель производственной функции (3.2).

При изменении показателя k на 1% и при постоянном объеме L трудовых ресурсов значение нормы замещения S меняется на $\frac{\partial S}{\partial k}\frac{k}{S}$%. Следовательно, для того, чтобы добиться изменения нормы замещения на 1%, необходимо изменить соотношение факторов $k=K/L$ на $\left(\frac{\partial S}{\partial k}\frac{k}{S}\right)^{-1}$ % при условии постоянства L.

Данная величина называется эластичностью замещения σ:

$$\sigma^{-1}=\frac{\partial S}{\partial k}\frac{k}{S}.$$

Нетрудно проверить, что для функции Кобба — Дугласа эластичность замещения постоянна и равна 1.

При изучении производственных функций часто делают различные предположения, в той или иной мере отвечающие экономической реальности. Основное предположение состоит в том, что производственную функцию (3.2) считают однородной первой степени, или линейно-однородной, т. е. требуют выполнения соотношения $F(\lambda K, \lambda L)=\lambda F(K, L)$ для всех $\lambda>0$.

Можно по-разному толковать содержательный смысл условия однородности. Наиболее наглядное объяснение состоит в том, что на практике часто одновременное увеличение фондов и рабочей силы в λ раз приводит к такому же увеличению производства продукта.

Применительно к капиталистической, конкурентной экономике понятие однородности производственной функции допускает следующую интерпретацию. Пусть Y обозначает суммарный доход всех членов общества (т. е. стоимость валового продукта, распределенная внутри данной экономической системы). По-прежнему, K и L — объем основных фондов и трудовых ресурсов. Пусть (3.2) выражает зависимость между этими величинами.

Воспользовавшись известной теоремой Эйлера об однородных функциях, можно написать

$$Y=\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial L}L. \qquad (3.7)$$

Будем считать, что общество состоит только из рабочих и капиталистов. Тогда доход Y распадается на две части: доход рабочих и прибыль капиталистов. Пусть средняя реальная заработная плата рабочего равна w. Следовательно, суммарный доход рабочих равен wL.

Буржуазная теория предельной производительности утверждает, что в условиях совершенной конкуренции общая занятость рабочей силы и заработная плата w связаны соотношением $\partial F/\partial L=w$. В пользу этого утверждения можно привести следующее соображение. Нанимая рабочих, капиталист увеличивает их численность на своем предприятии до тех пор, пока дополнительный доход $\partial F/\partial L$, приносимый очередным дополнительным рабочим, не превосходит его заработной платы.

Таким образом, второе слагаемое (3.7) имеет смысл суммарного дохода рабочих. Следовательно, первое слагаемое в (3.7) представляет собой прибыль капиталистов. При такой интерпретации величина $\partial F/\partial K$, характеризующая дополнительный доход от одной дополнительной единицы капитала, называется нормой прибыли.

При изучении однородных производственных функций естественно перейти к новым переменным: $k=K/L$, $y=Y/L$; обозначив $f(k)=F\left(\frac{K}{L},1\right)$, получаем запись функции (3.2) в виде $y=f(k)$.

Важным свойством однородных производственных функций является то, что для них предельная норма замещения S и показатель фондовооруженности k связаны взаимнооднозначной функциональной зависимостью. В самом деле, поскольку $Y=F(K, L)=Lf(K/L)$, то $\partial F/\partial L=f(k)-kf'(k)$, $\partial F/\partial K=f'(k)$, откуда

$$S=\frac{f(k)}{f'(k)}-k. \qquad (3.8)$$

Условия (3.4), (3.5) записываются в новых обозначениях следующим образом:

$$f'>0,\ f''<0. \qquad (3.9)$$

Отсюда нетрудно видеть, что правая часть равенства (3.8) представляет собой строго монотонно возрастающую (и, следовательно, взаимнооднозначную) функцию от k.

Выпишем введенные нами основные экономические характеристики производственных функций для случая однородной функции $Y=F(K, L)$ или $y=f(k)$, где $y=Y/L$ — средняя производительность труда, $k=K/L$ — фондовооруженность. Предельная производительность труда $v=f-kf'$; предельная фондоотдача $r=f'$; коэффициент эластичности по фондам $\alpha=kf'/f$; коэффициент эластичности по труду $\beta=1-kf'/f$; предельная норма замещения $S=f/f'-k$; эластичность замещения

$$\sigma=-\frac{f'(f-kf')}{kff''}.$$

Величина v по своему смыслу и в силу (3.9) является возрастающей функцией аргумента k; величина r — убывающая функция. Относительно поведения величин α, β, S, σ априори нельзя сказать ничего.

Представляет интерес вопрос о классах производственных функций, для которых какие-либо из этих величин являются постоянными, не зависящими от k. Оставляем читателю для доказательства следующие факты:

1. Если хотя бы один из коэффициентов α, β эластичности по ресурсам не зависит от k, то производственная функция является функцией Кобба — Дугласа.

2. Если предельная норма замещения S не зависит от k, то производственная функция линейна, т. е. $Y=AK+BL$, где A, B — константы.

Таким образом, особый интерес представляет лишь случай, когда постоянной является эластичность замещения σ.

Соответственно характеру поведения показателя эластичности замещения различают два класса производственных функций: VES — Variable Elastisity of Substitution (переменная эластичность замещения); CES — Constant Elastisity of Substitution (постоянная эластичность замещения).

Класс функций с постоянной эластичностью замещения допускает простое описание. Для его определения достаточно решить дифференциальное уравнение

$$-\frac{f'(f-kf')}{kff''}=\sigma,$$

считая величину σ заданной константой, или эквивалентное ему уравнение

$$\frac{dk}{dS}\frac{S}{k}=\sigma. \qquad (3.10)$$

С целью избавить читателя от проведения утомительных выкладок, приведем решение уравнения (3.10). Непосредственно из (3.10) имеем $S=Ck^{1/\sigma}$, где C — произвольная константа. Привлекая выражение (3.8) для нормы замещения S, получаем уравнение

$$\frac{f'}{f}=\frac{1}{k+Ck^{1/\sigma}},$$

или

$$\ln f=\int\frac{dk}{k+Ck^{1/\sigma}}. \qquad (3.11)$$

Интеграл в правой части формулы (3.11) вычисляется непосредственно заменой переменных $k=t\sigma/(\sigma-1)$ и равен $\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln C_1(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C)$, где C_1 — произвольная константа.

Таким образом, общее решение уравнения (3.10) имеет вид

$$f=C_1(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Возвращаясь к переменным K и L, получаем

$$Y=C_1(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Обозначая $\rho=(1-\sigma)/\sigma$ и выбирая подходящим образом константы C_1 и C, общее решение уравнения (3.10) можно записать в виде

$$Y=F(K,L)=A[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}, \qquad (3.12)$$

$A>0$, $0<\delta<1$, $\rho>-1$. Форма записи (3.12) решения уравнения (3.10) является общепринятым видом производственной функции класса CES.

Приведенное нами решение годится лишь для случая $\sigma\neq0$, $\sigma\neq1$ (убедитесь в этом!).

В случае $\sigma=1$ решение уравнения (3.10) дает уже знакомую нам функцию Кобба — Дугласа.

Случай $\sigma=0$ можно получить предельным переходом $\sigma\to 0(\rho\to\infty)$ из формулы (3.12):

$$\lim\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-1/\rho}=\min\{K, L\}. \qquad (3.13)$$

Полученная функция называется производственной функцией с фиксированными пропорциями.

Отметим, что экономически равенство $\sigma=0$ означает отсутствие замещения факторов, что вполне согласуется с характером функции (3.13): в случае $K\neq L$ полностью используется фактор, имеющийся в минимальном количестве, а второй остается недоиспользованным.

Эту производственную функцию обычно записывают в виде $F(K, L)=\min\{aK, bL\}$; здесь коэффициент a имеет смысл фондоотдачи, коэффициент b соответствует производительности труда.

Перенесение всех введенных показателей на случай n-факторной производственной функции вида (3.1) не составляет труда. Средняя производительность i-того ресурса — y/x_i; предельная производительность i-того ресурса — $\partial f/\partial x_i$; коэффициент эластичности выпуска по i-тому ресурсу $\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{y}$; предельная норма замещения i-того ресурса j-тым $-S_{ij}=-\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f/\partial x_j}{\partial f/\partial x_i}$; эластичность замещения i-того ресурса j-тым

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial(x_i/x_j)}{\partial S_{ij}}\frac{S_{ij}}{x_i/x_j}.$$

Основным объектом дальнейшего изучения для нас будут именно линейно-однородные двухфакторные производственные функции вида (3.2), удовлетворяющие условиям (3.4), (3.5) или в обозначениях $k=K/L$, $y=Y/L$, $f(k)\equiv F(K/L, 1)$ функции вида $y=f(k)$, удовлетворяющие условиям $f'>0$, $f''<0$. Кроме того, будем считать выполненными для функции $y=f(k)$ следующие условия:

$$f(0)=0,\ \lim_{k\to\infty}f(k)=\infty,\ \lim_{k\to 0}f'(k)=\infty,\ \lim_{k\to\infty}f'(k)=0.$$

Перечисленные условия можно интерпретировать естественным образом: при отсутствии основных фондов выпуск равен нулю; при неограниченном росте фондовооруженности объем выпуска также растет неограниченно; при возрастании фондовооруженности от нуля происходит стремительный рост объемов выпуска, который при дальнейшем росте фондовооруженности сходит на нет.

Двухфакторная производственная функция, обладающая всеми перечисленными свойствами, называется неоклассической.

§ 2. Построение и использование производственных функций

Проблема построения производственной функции, так же как и проблема ее использования с целью анализа производства в масштабах народного хозяйства в целом или отдельных его отраслей, представляет собой сложную научную задачу, рецепта для решения которой в общем случае в настоящий момент не существует. Цель данного параграфа — изложить некоторые методические соображения, относящиеся к этому вопросу.

Можно указать следующие основные этапы построения производственной функции экономического процесса:

1) количественная оценка участвующих в производстве ресурсов (формирование R^n_+);

2) выбор набора оценок выпускаемой продукции (формирование R^m_+);

3) выбор области определения D производственной функции;

4) определение вида производственной функции и выбор ее параметров.

Практическому выполнению указанных этапов построения производственной функции должен предшествовать тщательный качественный анализ экономического существа изучаемого производственного процесса и целей, преследуемых на данной стадии его изучения. В зависимости от того, желаем ли мы

а) подтвердить количественными методами некоторые общие выводы качественного порядка;

б) более глубоко проанализировать некоторые наметившиеся тенденции и закономерности;

в) получить модель, пригодную для прогнозирования;

г) предложить методологию оптимального управления изучаемым процессом,

определяется объективная необходимость построения производственной функции, выбор количества и список производственных факторов и т. д.

Особое значение имеет отбор факторов, включаемых в производственную функцию. Ясно, что включение всех факторов либо невозможно, либо нецелесообразно: не все факторы известны исследователю, по некоторым может не быть необходимой статистики, другие не допускают адекватного количественного описания; влияние одних факторов заведомо весьма слабо, некоторые факторы могут оказаться тесно коррелированными.

При построении однопродуктовой производственной функции для народнохозяйственного уровня в число факторов обычно включают только такие ресурсы, как труд, производственные фонды, природные ресурсы. На уровнях отраслей, предприятий в списках ресурсов фигурируют и промежуточные продукты: энергия, сырье, материалы и т. д.

Основой построения производственной функции после выбора списка факторов является достаточно большая совокупность статистических наблюдений, которая формируется либо по материалам учета (отчетности), либо в результате специальных экспериментов.

Анализ и предварительное изучение количественных статистических данных может помочь сделать приближенные выводы о поведении различных экономико-математических характеристик изучаемого производственного процесса: предельных производительностей, коэффициентов эластичности и т. д.

Грубая оценка этих показателей заменой дифференциалов соответствующими разностями позволяет с определенной степенью точности указать параметрический класс функций, среди которых может лежать производственная функция, моделирующая изучаемый процесс.

Последующее определение значений параметров проводится методами математической статистики, скажем, методом наименьших квадратов.

Построенная производственная функция может подвергаться проверке на основе вновь получаемых отчетных данных, например за очередной квартал, год и т. д. Вообще процесс построения производственной функции может рассматриваться как классическая математическая задача продолжения функции: дискретное производственное отображение, определяемое на основе прошлых отчетных данных, распространяется на некоторую более широкую область D.

Имеется достаточное количество примеров построения конкретных производственных функций. Так, в [35] построена производственная функция народного хозяйства СССР, представляющая собой динамический вариант функций Кобба — Дугласа (подробнее об этом будет говориться ниже), рассчитанная на основе данных за 1951—1963 гг.

В работе [36] американского экономиста М. Вейтцмана на основе советских статистических данных о развитии промышленности в СССР за 1950—1966 гг. построена производственная функция класса CES.

Построенная производственная функция, достаточно адекватно моделирующая изучаемый производственный процесс, дает широкие возможности для ее применения. Основная задача анализа производственной функции — дать исходный материал для научного предвидения, служить инструментом эффективного оптимального планирования. В этом смысле возможности аппарата производственных функций неисчерпаемы.

Так, если производственная функция имеет вид $Y=F(K, L)$ и известно плановое задание Y на будущий период, то по известному значению одного из факторов можно определить необходимую потребность в другом. Наоборот, по известным значениям факторов K и L можно выдать прогноз о величине произведенного продукта.

В качестве простейших примеров оптимизационных задач, формулируемых и решаемых на языке производственных функций, рассмотрим следующие. Пусть известны цены p_1 и p_2 ресурсов, участвующих в производственной функции

I. $$\max Y,$$

$$p_1K + p_2L = c.$$

II.
$$\min(p_1K + p_2L),$$
$$F(K, L) = Y.$$

В задаче I отыскивается максимум продукта при заданной сумме затрат, в задаче II минимизируются затраты при заданном объеме выпуска продукции. Для функции Кобба — Дугласа $Y = AK^{\alpha}\ L^{\beta}$ решение обеих задач I и II дает одно и то же оптимальное соотношение факторов

$$K/L = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{p_2}{p_1}.$$

§ 3. Производственные функции и экзогенный научно-технический прогресс

До этого параграфа при обсуждении производственных функций мы замалчивали тот факт, что производственная структура любого участка народного хозяйства подвержена со временем изменениям, обусловленным разнообразными причинами, которые мы условно назовем научно-техническим прогрессом. Это явление было обнаружено при первых же попытках построения производственных функций и использования их как инструмента для получения прогнозов. Поэтому в настоящее время основным является понятие динамической производственной функции. Например, однопродуктовая двухфакторная производственная функция имеет вид $Y(t) = F(K(t), L(t), t)$. Мы по-прежнему будем предполагать функцию F линейно-однородной по факторам производства K и L: $F(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda F(K, L, t)$.

На протяжении этого параграфа остаются действительными наши обозначения из § 1 для основных характеристик функции $F(K, L, t)$. Под техническим прогрессом будем понимать монотонное возрастание функции $F(K, L, t)$ по аргументу t.

Примерами производственных функций такого типа являются:

а) $Y = A(t)F_0(K, L)$, (3.14)

б) $Y = F_0(K, A(t)L)$, (3.15)

в) $Y = F_0(A(t)K, L)$. (3.16)

По мере практического изучения производственных функций было выдвинуто несколько гипотез относительно характера воздействия научно-технического прогресса на общественное производство. Как правило, эти гипотезы формулируются в терминах величин y, k, v, r, α, β, S, σ. Предполагается, что технический прогресс приводит к изменению этих величин. Например, качественное изменение состава основных фондов приводит к росту производительности труда, т. е. к увеличению показателей y и v. Естественно, однако, что технический прогресс воздействует, как правило, сразу на несколько, если не на все, из перечисленных показателей. Поэтому основным для классификации различных типов прогресса является сохранение во времени определенных зависимостей между этими величинами.

Назовем технический прогресс $F(K, L, t)$ Ф-нейтральным, если $\Phi(y, k, v, r, \alpha, \beta, S, \sigma) \equiv 0$, где Φ — некоторая функция. Частными случаями понятия Ф-нейтральности являются следующие три случая.

Технический прогресс называется нейтральным по Хиксу, если предельная норма замещения S является постоянной во времени функцией фондовооруженности, т. е.

$$S = \varphi(k), \tag{3.17}$$

где φ — некоторая функция. Соотношение (3.17) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Вспоминая определение S, получаем

$$\frac{f}{f'} - k = \varphi(k).$$

Пусть $f_0(k)$ — некоторое частное решение этого уравнения. Общее решение должно содержать одну произвольную константу (в нашем случае — произвольную функцию времени, не зависящую от k). Нетрудно видеть, что функция вида $A(t)f_0(k)$ является решением данного уравнения при любом $A(t)$. Таким образом, функция $y=A(t)f_0(k)$ является общим решением уравнения (3.17). Возвращаясь к переменным Y, K, L, получаем функцию вида (3.14).

Множитель $A(t)$ иногда интерпретируется как мера современного состояния технических знаний. Обычно считают $A(t)>0$, $A'(t)>0$.

Технический прогресс называется нейтральным по Харроду, если предельная фондоотдача является постоянной во времени функцией средней фондоотдачи: $r=\psi(z)$ или $f'=\psi(f/k)$. Пусть $f_0(k)$ — частное решение данного уравнения. Нетрудно видеть, что функция $f=A(t)f_0(k/A(t))$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. В самом деле,

$$f'=f_0'(k/A(t)),\ \psi(f/k)=\psi\left(\frac{f_0(k/A(t))}{k/A(t)}\right).$$

По определению функции $f_0(k)$ имеем

$$f_0'(k/A(t))=\psi\left(\frac{f_0(k/A(t))}{k/A(t)}\right),$$

откуда $f'=\psi(f/k)$. Следовательно, функция $f=A(t)f_0(k/A(t))$ — общее решение исходного дифференциального уравнения. Возвращаясь к переменным Y, K, L, получаем, что в случае, когда технический прогресс нейтрален по Харроду, производственная функция имеет вид (3.15). Нейтральный по Харроду технический прогресс эквивалентен росту во времени численности рабочей силы.

Технический прогресс называется нейтральным по Солоу, если предельная производительность труда является постоянной во времени функцией средней производительности.

Рассмотрения, полностью аналогичные предыдущим, дают общий вид производственной функции, отражающей технический прогресс, нейтральный по Солоу, совпадающий с (3.16). Прогресс такого типа эквивалентен росту во времени основных производственных фондов.

Отметим, что перечисленные типы научно-технического прогресса отражают так называемый экзогенный прогресс, т. е. технологические изменения, происхождение которых не обусловливается внутри самой модели (производственной функции), а лишь учитываются ею. Так, технический прогресс, нейтральный по Хиксу (3.14), можно трактовать как учет растущего опыта работников, отражение современного состояния научно-технических знаний. При этом предполагается, что возрастание коэффициента $A(t)$ (мультипликатора прогресса) происходит независимо от остальных параметров модели, от их динамики.

Существуют, однако, модели, в которых происхождение научно-технического прогресса определяется внутри данной модели и зависит от действий участников экономической системы, моделируемой производственной функцией. Технический прогресс такого типа называется эндогенным. Рассмотрение эндогенного научно-технического прогресса приводит к весьма интересным и содержательным постановкам различных оптимизационных динамических задач. Примеры таких задач будут разобраны в гл. 2.

Введение понятия динамической производственной функции сразу же ставит перед исследователем новые по сравнению со статистическим случаем проблемы. Здесь мы вкратце остановимся на некоторых из них. При описании однопродуктовой двухфакторной производственной функции (3.2) мы интерпретировали величину основных производственных фондов (K) как число однотипных машин, а L — как число одинаковых в производственном смысле работников. Это предположение, представляющее собой существенную идеализацию и в случае статистической производственной функции, конечно, становится неприемлемым в динамическом варианте.

Действительно, при изучении динамики производства, выражающейся, в частности, в росте и появлении новых производственных фондов, нет основания считать, скажем, машины, созданные в разные годы, однотипными. Кроме того, появляется необходимость учитывать факт выбывания (амортизацию) старых машин. Вместе с тем нельзя уже считать однородным и труд людей, работающих на разнотипных машинах.

Пусть $K(t, \tau)$ — часть основных фондов, введенных в эксплуатацию в году τ и продолжающих функционировать к году t, $t \geqslant \tau$, $K(t, \tau) \leqslant K(\tau, \tau)$. Пусть $L(t, \tau)$ — часть общей рабочей силы $L(t)$, обслуживающая указанные машины. Тогда часть $Y(t, \tau)$ национального дохода $Y(t)$, произведенного в момент t на машинах выпуска года τ, равна

$$Y(t, \tau) = F(K(t, \tau), L(t, \tau), \tau). \qquad (3.18)$$

Отсюда валовый национальный доход $Y(t)$ в год t равен

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} Y(t, \tau)\, d\tau, \qquad (3.19)$$

В формулах (3.18), (3.19) остается открытым вопрос о выборе распределения $L(t, \tau)$ рабочей силы. Считая, что распределение рабочей силы должно быть подчинено задаче максимизации валового национального дохода $Y(t)$, и предполагая, что производственная функция (3.18) допускает перераспределение рабочей силы (т. е. эластичность замещения $\sigma > 0$), рассмотрим следующую задачу:

$$Y(t) = \max_{L(t,\tau)} \int_{-\infty}^{t} F(K(t,\tau), L(t,\tau), \tau)\, d\tau, \qquad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^{t} L(t,\tau)\, d\tau = L(t), \qquad (3.21)$$

где функции $K(t, \tau)$, $L(t, \tau)$ считаем непрерывными.

Задача (3.20), (3.21) представляет собой обычную изопериметрическую задачу вариационного счисления, уравнение Эйлера для которой имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \mu(t), \qquad (3.22)$$

где $\mu(t)$ — независящий от τ множитель Лагранжа. Как мы уже видели в § 2, для линейно-однородной производственной функции предельная производительность труда $\partial F/\partial L$ является функцией фондовооруженности k: $\frac{\partial F}{\partial L} = f(k, \tau) - k\frac{\partial f}{\partial k} = v(k, \tau)$. Из основного требования (3.4) для производственных функций следует, что функция $v(k, \tau)$ при каждом фиксированном τ представляет собой монотонно возрастающую функцию k.

Из этого вытекает, что уравнение (3.22), которое мы запишем в виде $v(k, \tau) = \mu(t)$, имеет единственное решение $k^* = k^*(\mu(t), \tau)$; искомое распределение $L^*(t, \tau)$ рабочей силы определяется равенством

$$L^*(t,\tau) = \frac{K(t, \tau)}{k^*(\mu(t), \tau)}, \qquad (3.23)$$

где $\mu(t)$ находится из уравнения (3.21):

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{K(t, \tau)}{k^*(\mu(t), \tau)}\, d\tau = L(t). \qquad (3.24)$$

Проиллюстрируем решение задачи (3.20), (3.21) на примере функции Кобба — Дугласа. Пусть

$$Y(t,\tau)=F(K(t,\tau),L(t,\tau),\tau)=A(\tau)K^{\alpha}(t,\tau)L^{\beta}(t,\tau),$$

где параметры α, β постоянны и, как обычно, $\alpha>0$, $\beta>0$; $\alpha+\beta=1$. Тогда $\partial F/\partial L=\beta A(\tau)k_{\alpha}(t,\tau)$ и решение соответствующего уравнения (3.22) имеет вид

$$k^{*}(t,\tau)=\left[\frac{\mu(t)}{\beta A(\tau)}\right]^{1/\alpha}.$$

Подставляя данное выражение в (3.24), получаем выражение для $\mu(t)$:

$$\mu(t)=\beta\left\{\frac{1}{L(t)}\int\limits_{-\infty}^{t}K(t,\tau)A^{1/\alpha}(\tau)\,d\tau\right\}^{\alpha}.$$

Тогда

$$k^{*}(t,\tau)=\frac{1}{L(t)A^{1/\alpha}(\tau)}\int\limits_{-\infty}^{t}K(t,\tau)A^{1/\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

Окончательно по формуле (3.23) находим оптимальный вариант распределения рабочей силы:

$$L^{*}(t,\tau)=L(t)\frac{K(t,\tau)A^{1/\alpha}(\tau)}{\int\limits_{-\infty}^{t}K(t,\tau)A^{1/\alpha}(\tau)\,d\tau}.$$

Подставляя выражение для $L^{*}(t,\tau)$ в (3.18) и (3.19), получаем значение величины $Y(t)$ валового национального дохода в момент времени t при оптимальном использовании трудовых ресурсов:

$$Y(t)=\left\{\int\limits_{-\infty}^{t}A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)\,d\tau\right\}^{\alpha}L^{\beta}(t). \tag{3.25}$$

Если здесь обозначить

$$K(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)\,d\tau, \tag{3.26}$$

то формула (3.25) принимает вид

$$Y(t) = K^{\alpha}(t) L^{\beta}(t). \qquad (3.27)$$

Естественно считать производственной функцией именно выражение для значения валового национального дохода при оптимальном распределении ресурсов.

Производственная функция (3.27) имеет вид функции Кобба — Дугласа, если считать, что величина $K(t)$, определяемая равенством (3.26), представляет собой количество основных фондов в момент времени t. Отсюда возникает идея рассматривать функцию $A_0(\tau) = A^{1/\alpha}(\tau)$ как некоторый коэффициент переоценки основных фондов с целью иметь возможность сравнения качественно разнородных фондов.

Используя вновь введенное обозначение, запишем нашу производственную функцию в виде

$$Y(t, \tau) = [A_0(\tau) K(t, \tau)]^{\alpha} L^{\beta}(t, \tau).$$

Видим, что в данном случае технологические изменения носят характер технического прогресса, нейтрального по Солоу. Оказывается, данный факт не случаен. Именно, если рассматривать задачу (3.20)—(3.21) для линейно-однородной функции от двух факторов K и L и ввести класс функций

$$K(t) = \int_{-\infty}^{t} A(\tau) K(t, \tau) \, d\tau,$$

где $A(\tau)$ — произвольная непрерывная весовая функция, то можно доказать следующее утверждение [38]: равенство

$$\max_{L(t,\tau)} \int_{-\infty}^{t} F(K(t, \tau), L(t, \tau), \tau) \, d\tau = H(K(t), L(t)),$$

где H — некоторая линейно-однородная функция, возможно тогда и только тогда, когда $F(K, L, t) = H(A(t)K, L)$, т. е., если технический прогресс нейтрален по Солоу.

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ

§ 1. Потребление и накопление — оптимальные пропорции

Ряд вопросов в рамках теории производственных функций при исследовании их динамики связан с изучением потребления одновременно с процессом производства национального дохода. В настоящий момент существует большое количество моделей, в которых с разной степенью подробности описывается все многообразие взаимоотношений процессов производства и потребления. Чтобы дать представление о характере подобных моделей и проблемах, возникающих при их исследовании, изложим один из простейших вариантов, являющийся максимальным упрощением модели, предложенной Ф. Рамсеем (см. [31, 39]).

Предполагается, что в каждый момент времени выпуск Y делится на потребление C и инвестиции (капиталовложения) I:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = (1 - s) Y + sY, \qquad (3.28)$$

$$0 \leqslant s = s(t) \leqslant 1.$$

Производственные фонды амортизируют с темпом $\mu > 0$. Это означает, что за единицу времени из строя выбывает μ-тая часть имеющихся основных фондов. Таким образом, выполняется уравнение

$$\dot{K}(t) = s(t) F(K(t), L) - \mu K(t), \qquad (3.29)$$

где $0 < \mu < 1$. Здесь неявно предполагается, что основные фонды однородны в течение всего рассматриваемого промежутка времени, технологических изменений производственной функции не происходит, и трудовые ресурсы находятся на постоянном уровне.

В качестве критерия, подлежащего максимизации в плановом периоде $[0, T]$, примем общее удельное потребление (на одного работника) с дисконтированием:

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L} e^{-\delta t} dt, \tag{3.30}$$

где $\delta > 0$ — константа. Наложим также условие

$$\frac{K(T)}{L} \geqslant k^T > 0, \tag{3.31}$$

которое интерпретируется как условие «экономического горизонта» — планирование накопления и потребления должно обеспечить определенный экономический потенциал за пределами рассматриваемого периода. Задача планирующего органа состоит в выборе функции $s(t)$, $0 \leqslant s(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, максимизирующей функционал (3.30) при ограничениях (3.28), (3.29), (3.31).

Перейдем в описанной задаче к новым переменным: фондовооруженности $k = K/L$ и удельному потреблению $c = C/L$, обозначив при этом, как обычно, $f(k) = F(K/L, 1)$. Нужно максимизировать

$$\int_0^T (1 - s(t)) f(k(t)) e^{-\delta t} dt \tag{3.32}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \mu k(t), \tag{3.33}$$

$$k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \geqslant k^T > 0, \tag{3.34}$$

$$0 \leqslant s(t) \leqslant 1. \tag{3.35}$$

Решение этой задачи проводится на основе принципа максимума Понтрягина. Можно считать, что двойственная переменная ψ_0 равна 1. В самом деле, если $\psi_0 = 0$, то, как нетрудно показать (это мы оставляем читателю), оптимальным будет управление $s(t) \equiv 1$. Это означает, что плановое задание k^T слишком велико — все ресурсы уходят на его выполнение. Поскольку этот случай нереалистичен, мы его отбрасываем.

Пусть $\psi(t)$ — двойственная переменная, соответствующая уравнению (3.33). Тогда гамильтониан нашей задачи имеет вид

$$\mathcal{H}(\psi, k, t, s) = (1 - s) e^{-\delta t} f(k) + \psi [s f(k) - \mu k].$$

Если план $s(t)$ оптимален, то в силу принципа максимума существует непрерывная функция $\psi(t)$ такая, что выполнены условия (3.33), (3.34) и

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -(1-s)\,e^{-\delta t} f'(k) - \psi\,[sf'(k) - \mu], \tag{3.36}$$

функция $s(t)$ максимизирует форму

$$(1-s)\,e^{-\delta t} + \psi s \tag{3.37}$$

при ограничениях $0 \leqslant s \leqslant 1$ и

$$\psi(T)\,[k(T) - k^T] = 0. \tag{3.38}$$

Выражение (3.37) получается из $\mathcal{H}$ отбрасыванием членов, не зависящих от s. Введя обозначение $q = \psi e^{\delta t}$ (величина q имеет смысл «объективно обусловленной оценки» производственных фондов в момент времени t), из (3.37) легко получаем

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q > 1, \\ 0, & \text{если } q < 1, \\ 0 \leqslant s(t) \leqslant 1, & \text{если } q = 1. \end{cases} \tag{3.39}$$

Уравнение (3.36) при переходе к новой переменной принимает вид

$$\dot{q}(t) = (\delta + \mu)\,q - [(1-s) + sq]\,f'(k). \tag{3.40}$$

Таким образом, из принципа максимума вытекает, что если $s(t)$ — оптимальное управление, то оно удовлетворяет (3.39), и система дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) = sf(k) - \mu k, \\ \dot{q}(t) = (\delta + \mu)\,q - (1 - s + sq)\,f'(k), \\ k(0) = k_0, \quad k(T) \geqslant k^T, \\ q(t)\,[k(T) - k^T] = 0 \end{gathered} \tag{3.41}$$

имеет решение.

Отметим, что первое уравнение системы (3.41) связано со вторым именно через функцию $s(t)$, удовлетворяющую условию (3.39). Анализ системы дифференциальных уравнений (3.41) облегчается тем, что она автономна — в правые части уравнений не входит в явном виде время t. С целью исследовать качественное поведение решений системы (3.41) найдем участки законопостоянства производных $\dot{k}(t)$ и $\dot{q}(t)$. Рассмотрим отдельно два случая.

А. $q>1$. Тогда $\dot{q}(t)=(\delta+\mu)q-qf'(k)$ и уравнение $\dot{q}(t)=0$ приводит к $f'(k)=\delta+\mu$. Учитывая условия, наложенные на неоклассическую производственную функцию $f(k)$, можно заключить, что данное уравнение имеет единственное решение $k^*>0$. Далее, уравнение $\dot{k}(t)=$ $=f(k)-\mu k=0$ с учетом неоклассических условий также дает единственный корень $\tilde{k}>0$. Нетрудно показать, что $k^*<\tilde{k}$. В самом деле, из того, что $f'(k)$ является убывающей функцией, имеем

$$f(k^*)=\int_0^{k^*} f'(k)\,dk>\int_0^{k^*}(\delta+\mu)\,dk=(\delta+\mu)k^*>\mu k^*.$$

Таким образом, точка k^* удовлетворяет неравенству $f(k^*)>\mu k^*$. Поскольку функция $f(k)$ — вогнута $(f''(k)<0)$, это условие вместе с равенством $f(\tilde{k})=\mu\tilde{k}$ и дает $k^*<\tilde{k}$.

Следовательно, в случае А имеем:

$$\dot{q}(t)\begin{cases}<0 \text{ при } k<k^*,\\ =0 \text{ при } k=k^*,\\ >0 \text{ при } k>k^*;\end{cases} \tag{3.42}$$

$$\dot{k}(t)\begin{cases}>0 \text{ при } k<\tilde{k},\\ =0 \text{ при } k=\tilde{k},\\ <0 \text{ при } k>\tilde{k}.\end{cases}$$

Б. $q<1$.

Тогда $\dot{q}(t)=(\delta+\mu)q-f'(k)$ и уравнение $\dot{q}(t)=0$ дает

$$q=\frac{f'(k)}{\delta+\mu}>0. \tag{3.43}$$

Кроме того, $\dot{k}(t)=-\mu k<0$. Полученные сведения позволяют нам нарисовать фазовую диаграмму для системы дифференциальных уравнений (3.41), т. е. изобразить на плоскости (k, q) проекцию траекторий $(k(t), q(t))$, являющихся решениями системы.

С этой целью вначале сведем полученную информацию воедино. На рис. 2 изображено положение облас-

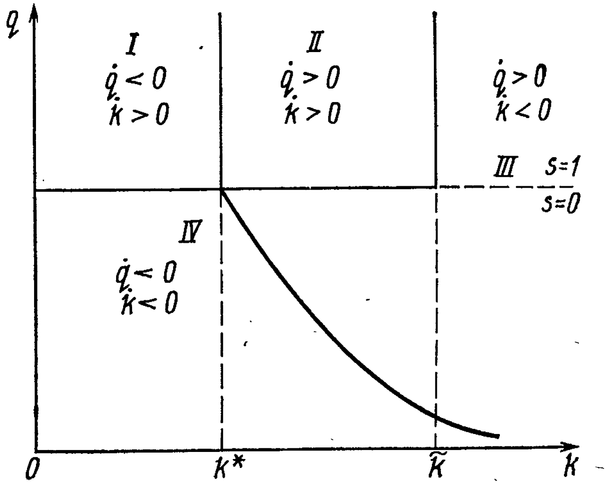

Рис. 2

тей знакопостоянства производных $\dot{q}$ и $\dot{k}$ на плоскости (k, q). Здесь кривая, отделяющая области IV и III, задается уравнением (3.43).

Теперь нетрудно нарисовать фазовые траектории решений нашей системы в зависимости от начальных условий $k(0)=k_0$ и $q(0)=q_0$. Так, если точка (k_0, q_0) принадлежит области I, то система уравнений (3.41) эквивалентна системе

$$\dot{k}(t) = f(k) - \mu k,$$

$$\dot{q}(t) = (\delta + \mu) q - q f'(k).$$

Из общих теорем о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений вытекает, что через заданную точку (k_0, q_0) области I проходит единственная кривая $(k(t), q(t))$, являющаяся решением системы. При этом фазовая траектория будет иметь один из видов, изображенных на рис. 3, 4 и 5. Подобные же рассуждения и иллюстрации можно было бы провести для каждого из случаев принадлежности точки (k_0, q_0) той или иной области.

Приведем сводную иллюстрацию типичных траекторий решения системы (3.41).

На рис. 6 изображены траектории, не проходящие через точку $(k^*, 1)$. Из предыдущих рассуждений ясно, что каждая такая траектория полностью определяется начальными условиями (k_0, q_0). Здесь под словами «полностью определяется» мы имеем в виду не только график

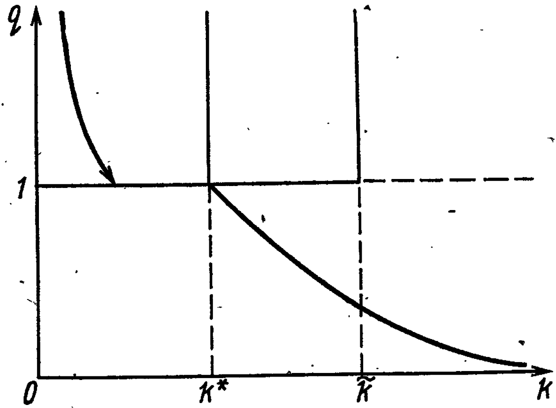

Рис. 3

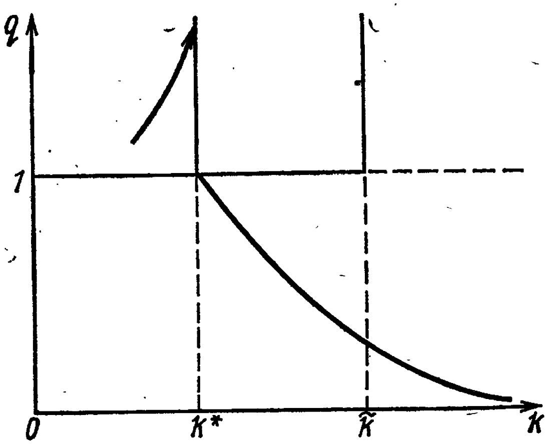

Рис. 4

зависимости $q(k)$, но и «скорость» его прохождения траекторией $(k(t), q(t))$. Имеется всего две траектории, «входящие» в точку $(k^*, 1)$, и две траектории, «выходящие» из нее. Они условно изображены на рис. 7. Точка $(k^*, 1)$, которую мы назовем особой, или узловой, обладает тем свойством, что, придя в нее, мы можем оставаться в ней сколь угодно долго, ибо она является общим корнем уравнений $\dot{k}(t)=0$, $\dot{q}(t)=0$. Для этого достаточно применять управление s^*, которое легко определить из этой системы уравнений: $sf(k)-\mu k=0$,

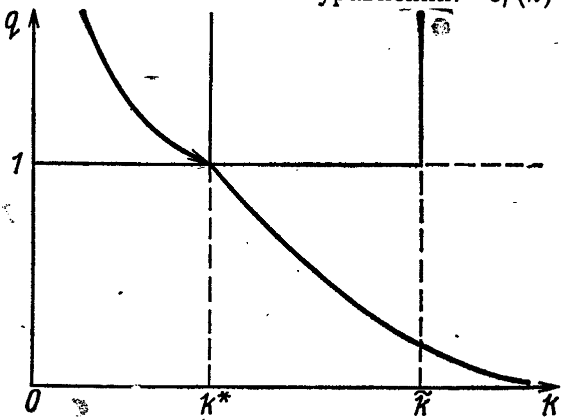

Рис. 5

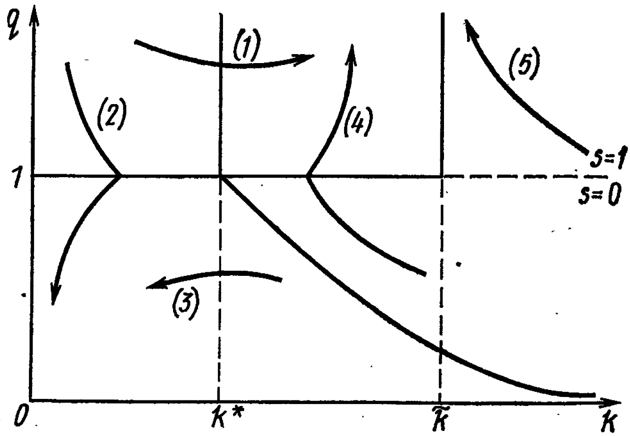

Рис. 6

т. е. $s=\mu k/f(k)$ и $f'(k)=\delta+\mu$, т. е. $k=k^*$. Окончательно:

$$s^*=\mu\frac{k^*}{f(k^*)}.$$

Из предыдущих рассуждений легко вытекает, в частности, что $0<s^*<1$.

Отсюда ясно, что траектории, входящие в узловую точку $(k^*, 1)$, не определяются полностью начальными условиями, ибо время пребывания в этой точке зависит

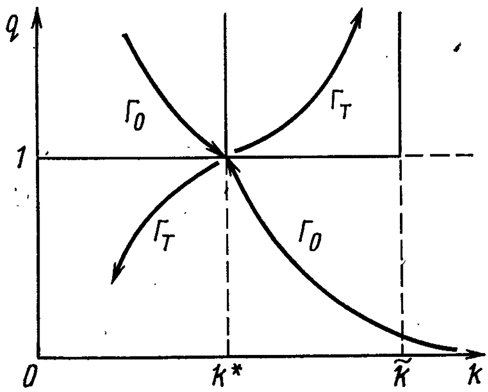

Рис. 7

от управляющего субъекта. Как видно из фазовой диаграммы (рис. 4), в случае $k_0<\tilde{k}$, $k^T\geqslant\tilde{k}$ вообще не существует допустимых траекторий. Это объясняется тем, что постоянный темп амортизации основных фондов μ и условие $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{k}(t)=0$ не позволяют достичь уровня фондовооруженности, большего или равного $\tilde{k}$ даже при условии отсутствия потребления. Поэтому будем рассматривать наиболее типичный случай k_0, $k^T<\tilde{k}$.

В дальнейшем будем ссылаться на типичные траектории, изображенные на рис. 4 и 5, как на траектории типа 1, 2, 3, 4 и Γ_0, Γ_T.

Если начальное условие q_0 выбрано таким образом, что фазовая траектория является траекторией типа 1, то время движения по этой траектории полностью определяется начальными условиями k_0 и q_0 и уравнением $\dot{k}(t)=f(k(t))-\mu k(t)$ и равно

$$T_1=\int_0^{k^T}\frac{dk}{f(k)-\mu k}.$$

В силу условия k_0, $k^T<\tilde{k}$ этот интеграл является собственным и величина T_1 конечна.

В случае траектории типа 3 время T_3 прохождения по ней равно

$$T_3=\int_{k^T}^{k_0}\frac{dk}{\mu k}.$$

При движении по траектории типа 2 время прохождения по ее «верхней» части (т. е. при $s=1$), когда происходит «накопление» основного капитала при отсутствии потребления, не превосходит величины

$$T_2'=\int_{k_0}^{k^*}\frac{dk}{f(k)-\mu k}.$$

Время же движения по «нижней» части траектории типа 2, как нетрудно видеть, не превосходит величины

$$T_2''=\int_{k^*}^{k^T}\frac{dk}{\mu k}.$$

Таким образом, время прохождения всей траектории типа 2 ограничено числом $T_2=T_2'+T_2''$.

Аналогичные рассуждения относительно траекторий типа 4, 5 дают верхнюю оценку времени ее прохождения, которую мы обозначим соответственно T_4 и T_5.

Пусть $T_0=\max\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$. Очевидно, что если $T>T_0$, то ни одна из траекторий типа 1, 2, 3, 4, 5 не может быть оптимальной. Проведенное исследование позволяет сформулировать следующий важный факт.

Теорема 3.1. Пусть промежуток планирования T достаточно велик ($T>T_0$). Тогда, если в задаче оптимального планирования (3.32)—(3.35) существуют допустимые траектории, то существует и оптимальное управление $s(t)$, которое устроено следующим образом: в начале периода (при $0 \leqslant t \leqslant T^*$) и в конце (при $T^{**} \leqslant \leqslant t \leqslant T$) $s(t)$ равно либо 0, либо 1. Все остальное время ($T^* \leqslant t \leqslant T^{**}$) $s(t) = s^*$. При этом величины T^* и T^{**} не зависят от T.

Для доказательства теоремы 1 к предыдущим рассуждениям достаточно добавить явное указание оптимальной траектории.

Существование оптимального решения $s(t)$ задачи (3.32)—(3.35), если найдется хотя бы одна допустимая траектория, обеспечивается вогнутостью производственной функции в силу общих теорем выпуклого анализа [34].

Следует выбрать начальное условие q_0 таким образом, чтобы точка (k_0, q_0) оказалась на траектории Γ_0, идущей в узловую точку $(k^*, 1)$. При этом управление равно либо 0, либо 1 в зависимости от соотношений величин k_0 и k^*. Отметим, что время T^* движения по траектории Γ_0 зависит только от k_0 и k^*.

Затем следует оставаться в точке $(k^*, 1)$ ровно столько, чтобы затем по траектории Γ_T попасть в точку с первой координатой k^T в момент T.

Отметим, что время движения по траектории Γ_T зависит только от k^T (и k^*, т. е. от функции f).

Сделаем оговорку. Может случиться, что траектория Γ_T, выходящая из равновесной точки $(k^*, 1)$ в направлении убывания k, проходит через точку вида $(\widehat{k}, 0)$, где $\widehat{k} > 0$. Тогда, если $k^T < \widehat{k}$, то оптимальная траектория на своем конечном участке устроена следующим образом: надо находиться в состоянии равновесия $(k^*, 1)$ ровно столько, чтобы, выйдя из него, оказаться в момент T как раз в точке $(\widehat{k}, 0)$. При этом терминальное условие $k(T) \geqslant k^T$ будет выполняться в виде строгого неравенства.

Содержательно это означает следующее: оказавшись в точке равновесия, нам выгодно поддерживать уровень фондовооруженности k^*, даже если потом (при $s=0$) он не успеет амортизировать до уровня k^T.

Дело в том, что доля $(1-s)k^*$, отчисляемая на потребление, выше, чем величина $k(t)$ при движении по рассматриваемой траектории Γ_T (точнее, надо говорить об интегралах от этих величин).

Чтобы показать, что такая возможность действительно имеет место, рассмотрим в качестве производственной функции $f(k)$ функцию Кобба — Дугласа вида k^α, где $0<\alpha<1$.

Система дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую траекторию Γ_T, такова:

$$\dot{k} = -\mu k,$$
$$\dot{q} = (\mu+\delta) - f'(k),$$
$$k(0) = k^*, \quad q(0) = 1.$$

Решение первого уравнения находится без труда: $k(t) = k^* e^{-\mu t}$. Решение однородного уравнения, соответствующего второму из уравнений системы равно $q(t) = Ce^{(\mu+\delta)t}$. Отыскивая решение неоднородного уравнения методом вариации постоянной, получаем

$$q(t) = C(t)\, e^{(\mu+\delta)t},$$

где $C(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{C}(t) = -f'(k)\, e^{-(\mu+\delta)t},$$
$$C(0) = 1.$$

Таким образом,

$$C(t) = 1 - \int_0^t f'(k(\tau))\, e^{-(\mu+\delta)\tau}\, d\tau.$$

Функция $q(t)$ обращается в ноль одновременно с функцией $C(t)$. Может ли функция $C(t)$ стать равной нулю, полностью зависит от поведения интеграла $\int_0^t f'(k(\tau))\, e^{-(\mu+\delta)\tau}\, d\tau$ как функции t. Решим уравнение $C(t) = 0$, или

$$\int_0^t f'(k(\tau))\, e^{-(\mu+\delta)\tau}\, d\tau = 1.$$

Вспоминая вид функций $f(k)$ и $k(t)$, получаем

$$[\alpha(k^*)]^{\alpha-1} \int_0^t e^{-\mu(\alpha-1)\tau} e^{-(\mu+\delta)\tau} d\tau = 1.$$

Напомним, что k^* является решением уравнения $f'(k) = \delta+\mu$. Окончательно, находим решение t уравнения $C(t)=0$:

$$\hat{t} = -\frac{1}{\alpha\mu+\delta} \ln\left(1 - \frac{\alpha\mu+\delta}{\mu+\delta}\right).$$

В силу условия $0<\alpha<1$ выражение под знаком логарифма лежит в интервале $(0, 1)$, следовательно, величина t действительна и положительна. Таким образом, функция Кобба — Дугласа дает нам требуемый пример.

Величина $s^* = \mu k^*/f(k^*)$ называется «золотым правилом» накопления. Узловая точка $(k^*, 1)$ осуществляет динамическое равновесие в нашей задаче — при управлении $s=s^*$ величина фондовооруженности остается постоянной и доля потребления также не зависит от времени.

Теорема 3.1 весьма напоминает магистральные теоремы Моришимы и Раднера, знакомые нам по ч. I и относящиеся к многопродуктовым моделям производства Неймана и Гейла. Этой теореме можно придать и такую формулировку: при увеличении продолжительности T планового периода доля времени, когда на оптимальной траектории не выполняется «золотое правило» накопления, стремится к нулю.

Можно было бы рассмотреть более сложный вариант описанной модели. Если считать, что объем L трудовых ресурсов меняется во времени экзогенным образом, скажем по экспоненциальному закону $L(t)=Le^{\lambda t}$, то анализ такой модели ничем не отличался бы от проведенного нами. Существенно более сложным является случай, когда учитывается технический прогресс, меняющий производственную функцию в зависимости от времени, скажем, если имеет место технический прогресс, нейтральный по Хиксу. Объясняется это в основном тем, что соответствующая система дифференциальных уравнений перестает быть автономной.

С целью облегчить понимание при первом знакомстве с предметом мы максимально упростили модель.

С более сложными случаями читатель может познакомиться в [31].

§ 2. Производственные функции в экологических моделях

Естественно, что в начальный период своего существования теория производственных функций имела дело в основном только с вопросами собственно производства. Затем в моделях, описываемых производственными функциями, стали явно учитывать процессы потребления. Исследование наиболее рационального соотношения между производством и потреблением дало интересные качественные выводы, с которыми мы познакомились в § 1. В самое последнее время в связи с проблемой охраны окружающей среды появилось определенное число моделей, посвященных данному вопросу. Поскольку основным источником загрязнения среды является современное производство, то изучение возможностей установления контроля над загрязнением окружающей среды происходит в рамках теории производственных функций. Здесь мы изложим одну из таких моделей, построенную и исследованную в [40].

Мы не будем давать сколько-нибудь общего определения понятия загрязнения окружающей среды. Отметим только, что оно включает в себя чрезвычайно широкий круг явлений. Загрязнение воздуха и воды, увеличение количества ДДТ в почве, радиация — все это загрязнение в широком смысле.

Предполагается, что интересы общества выражаются функцией полезности $u(c, P)$, зависящей от двух аргументов: c — объем потребления, P — переменная характеризующая объем загрязнения. При этом

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial P^2} < 0, \qquad (3.44)$$

$$\lim_{c \to 0} \frac{\partial u}{\partial c} = \infty.$$

Интерпретация этих соотношений затруднений не вызывает и мы на этом останавливаться не будем.

Сделаем дополнительно еще одно предположение о характере функции $u(c, P)$. Оно касается явления «замещения». Именно, если потребление c уменьшится на некоторую величину Δc, то для того, чтобы значение функции полезности не изменилось, требуется объем загрязнения P также уменьшить на некоторое ΔP. Как и в случае производственных функций, данный эффект определяется предельной нормой замещения

$$S = \frac{dP}{dc} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\frac{\partial u}{\partial P}}.$$

Наше предположение, накладываемое на функцию $u(c, P)$, будет состоять в том, что при малом уровне потребления для возмещения уменьшения c на одну единицу требуется уменьшить объем P загрязнения на очень большую величину и, наоборот, при неограниченном возрастании c величина ΔP, необходимая для возмещения одной единицы потребления, стремится к нулю.

Это означает, что линии уровня функции

$$S = -\frac{\partial u}{\partial c} \Big/ \frac{\partial u}{\partial P},$$

определяемые уравнениями вида $S(c, P) = S_0$, где $S_0 > 0$, носят характер гипербол. Именно, кривая $P = P(c, S_0)$, определяемая данным уравнением, должна обладать следующими свойствами:

$$\lim_{c \to 0} P(c, S_0) = \infty, \ \lim_{c \to \infty} P(c, S_0) = 0 \text{ и } P(c, S_0)$$

монотонно убывает при возрастании c.

Выведем формальные условия, обеспечивающие монотонное убывание функции $P(c, S_0)$. Рассмотрим вновь уравнение $S(c, P) = S_0$ задающее кривую $P = P(c, S_0)$, и вычислим производную

$$\frac{dP}{dc} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial c}}{\frac{\partial S}{\partial P}}.$$

Тогда условие убывания функции $P = P(c, S_0)$ принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial c} \Big/ \frac{\partial S}{\partial P} < 0.$$

Вычисляя частные производные функции $S=S(c, P)$, получаем, что требуемое условие выполняется при

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}-\frac{\partial u/\partial c}{\partial u/\partial P}\frac{\partial^2 u}{\partial c\partial P}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial P^2}\frac{\partial u/\partial c}{\partial u/\partial P}-\frac{\partial^2 u}{\partial c\partial P}\right)<0.$$

Данное неравенство справедливо, в частности, если $\partial^2 u/\partial c\partial P\leqslant 0$. Примером функции полезности, удовлетворяющей указанным условиям, служит функция $u(c, P)=$ $=Ac^{\alpha}-BP^{\beta}$, где $A, B>0$; $0<\alpha<1$; $\beta>1$.

В качестве критерия, подлежащего максимизации, принимается интеграл от функции полезности вдоль конкретной траектории $c(t)$ и $P(t)$ с учетом дисконтирования:

$$w=\int_0^T u(c, P)\, e^{-rt}dt. \tag{3.45}$$

Модель: контроль над загрязнением с помощью процессов очистки.

В качестве производственной функции рассматривается уже знакомая нам неоклассическая однопродуктовая двухфакторная функция, аргументами которой служат, как обычно, объем K основного капитала и объем L трудовых ресурсов. Вновь, с целью не усложнять изложение, будем считать, что предложение трудовых ресурсов не изменяется во времени. Предполагаем, что основной капитал амортизирует с постоянным темпом $\mu>0$.

Загрязнение и загрязнитель не используются в производстве как полезный продукт (что, например, имеет место в случае с ДДТ), а является его побочным продуктом. Считаем, что объем загрязнителя прямо пропорционален объему продукта производства и составляет от него долю ε, $0<\varepsilon<1$. Примером подобного производства может служить, например, металлургическая отрасль, производство бумаги и т. д. Таким образом, загрязнение измеряется в тех же единицах, что и основная продукция.

Как известно, окружающая среда обладает определенной способностью ассимилировать отходы производства. Будем считать, что естественная убыль отходов в каждый момент времени составляет долю γ от их общего количества. Общество, в свою очередь, может выделять часть произведенного общественного продукта на борьбу с загрязнением. Предполагается, что эффективность (производительность) затрат на уменьшение загрязнения постоянна. При этом затрата одной единицы продукции уменьшает загрязнение на δ единиц (будем считать $\delta > 1$).

Задача управления состоит в определении долей α и β выпуска, предназначенных на потребление и борьбу с загрязнением соответственно. Имеем следующую систему уравнений:

$$c = \alpha F(K, L), \tag{3.46}$$

$$\dot{K} = (1 - \alpha - \beta) F(K, L) - \mu K, \tag{3.47}$$

$$\dot{P} = (\varepsilon - \delta\beta) F(K, L) - \gamma P, \tag{3.48}$$

где $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$, $\alpha(t) + \beta(t) \leqslant 1$.

Будем решать задачу нахождения оптимального управления $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с помощью принципа максимума Понтрягина. Обозначим через ψ_1 двойственную переменную, соответствующую уравнению (3.47), ($\psi_1(t)$ — объективно обусловленная оценка капитала $K(t)$ в момент t), через ψ_2 — объективно обусловленную оценку загрязнения $P(t)$. Тогда гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = u(c, P) e^{-rt} + \psi_1 [(1 - \alpha - \beta) F(K, L) - \mu K] + \\ + \psi_2 [(\varepsilon - \delta\beta) F(K, L) - \gamma P].$$

Двойственная система уравнений такова:

$$\dot{\psi}_1 = -\left\{\frac{\partial u}{\partial c} \alpha \frac{\partial F}{\partial K} e^{-rt} + \psi_1 \left[(1 - \alpha - \beta) \frac{\partial F}{\partial K} - \mu\right] + \right. \\ \left. + \psi_2 (\varepsilon - \delta\beta) \frac{\partial F}{\partial K}\right\},$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial u}{\partial P} e^{-rt} + \psi_2 \gamma.$$

Перенормируем двойственные оценки:

$$q_1 = \psi_1 e^{rt}, \quad q_2 = \psi_2 e^{rt}.$$

Тогда двойственная система примет вид

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial u}{\partial c}\alpha\frac{\partial F}{\partial K} + q_1\left[r + \mu - (1-\alpha-\beta)\frac{\partial F}{\partial K}\right] + $$
$$+ q_2(\delta\beta - \varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K}, \qquad (3.49)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{\partial u}{\partial P} + q_2(\gamma + r), \qquad (3.50)$$

а гамильтониан $\mathscr{H}$ равен

$$\mathscr{H} = e^{-rt}\{u(\alpha F(K, L), P) + q_1[(1-\alpha-\beta)F(K, L) - \mu K] +$$
$$+ q_2[(\varepsilon - \delta\beta)F(K, L) - \gamma P]\}.$$

В силу принципа максимума, если управление $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ оптимально, то существуют непрерывные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, удовлетворяющие (3.49)—(3.50). При этом функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ максимизируют значение формы $\mathscr{H}$ $(q_1(t), q_2(t), K(t), P(t), \alpha, \beta)$ в момент времени t.

Выпишем функцию $\mathscr{H}$, перегруппировав ее члены,

$$\mathscr{H} = e^{-rt}\{u(\alpha F(K, L), P) - q_1\alpha F(K, L) -$$
$$-(q_1 + q_2\delta)F(K, L)\beta + q_1(F(K, L) - \mu K) +$$
$$+ q_2(\varepsilon F(K, L) - \gamma P)\}.$$

Видно, что для получения максимума функции $\mathscr{H}$ по переменным α, β достаточно максимизировать выражение

$$\varphi(\alpha, \beta) = v(\alpha) + \theta\beta \qquad (3.51)$$

по области $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \leqslant 1$,
где $v(\alpha) = u(\alpha F(K, L), P) - q_1\alpha F(K, L)$,

$$\theta = -(q_1 + q_2\delta)F(K, L).$$

В случае $\theta > 0$ очевидно, что максимум функции $\varphi(\alpha, \beta)$ достигается при $\alpha + \beta = 1$.

Если $\theta < 0$, максимум $\varphi(\alpha, \beta)$ достигается при $\beta = 0$.

Когда $\theta = 0$, то β — произвольно, а α либо равно 1, либо является решением уравнения $\partial v/\partial\alpha = 0$. (Максимум функции $v(\alpha)$ не может достигаться в точке $\alpha = 0$ в силу условий на функцию u: $\left.\frac{\partial u}{\partial c}\right|_{\alpha=0} = +\infty$.)

Полный анализ поведения оптимальных траекторий в данной модели довольно сложен, поскольку здесь имеется два управляющих параметра. Однако зная, какую важную роль играют при описании оптимальных траекторий точки равновесия (см. предыдущий параграф), попытаемся ответить на следующий вопрос. Существуют ли в данной модели траектории сбалансированного роста (точки равновесия), удовлетворяющие необходимым условиям принципа максимума, и сколько их?

Мы покажем, что существует ровно две точки равновесия. В одном из таких положений никаких средств на борьбу с загрязнением не тратится. Такое состояние авторы модели назвали «равновесием темного века». Оно характеризуется высоким уровнем производства (большим объемом основного капитала), высоким уровнем потребления и крайне высоким уровнем загрязнения, который регулируется лишь естественными процессами очистки.

Состояние равновесия, в котором производятся расходы как на потребление, так и на борьбу с загрязнением, называют «равновесием золотого века». Оно отличается более низкими уровнями капитала, потребления и загрязнения, чем равновесие темного века.

Состояние равновесия описывается условиями $\dot{K}=0$, $\dot{P}=0$, т. е.

$$(1-\alpha-\beta)F(K, L)=\mu K, \tag{3.52}$$

$$(\varepsilon-\delta\beta)F(K, L)=\gamma P. \tag{3.53}$$

Поскольку величина K в состоянии равновесия постоянна и, естественно, положительна, то из (3.52) вытекает, что сумма $\alpha+\beta$ соответствующих оптимальных управлений постоянна и строго меньше единицы. Следовательно, $\alpha<1$, $\beta<1$, и имеет место случай $\theta\leqslant 0$. Из (3.53) получаем, что в точке равновесия управление β (а следовательно, и α) постоянно. Поскольку $\alpha<1$, то, значит, $\partial v/\partial\alpha=0$, т. е.

$$\frac{\partial u(\alpha F(K, L), P)}{\partial c}=q_1, \tag{3.54}$$

откуда вытекает, что функция $q_1(t)$ также является константой. Формула (3.49) показывает, что в таком случае

$q_2(t)$ также постоянно. Из формулы (3.50) получаем выражение q_2 через функцию u:

$$q_2 = \frac{1}{\gamma + r}\,\frac{\partial u}{\partial P}.$$

Уравнение (3.49) принимает вид

$$q_1\left(r + \mu - \frac{\partial F}{\partial K} + \beta\,\frac{\partial F}{\partial K}\right) - q_2\,(\varepsilon - \delta\beta)\,\frac{\partial F}{\partial K} = 0. \qquad (3.55)$$

Рассмотрим теперь два случая равновесия. Равновесие золотого века — это равновесие при $\theta = 0$. Равновесие темного века — когда $\theta < 0$.

Случай 1. (Золотой век.) Поскольку $\theta = 0$, то $q_2 = -q_1/\delta$. Подставляя полученное выражение для q_2 в (3.55), получаем $q_1[r + \mu - (1 - \varepsilon/\delta)\partial F/\partial K] = 0$. Если $q_1 = 0$, то и $q_2 = 0$, что противоречит формулировке принципа максимума. Следовательно, равно нулю выражение в квадратных скобках, откуда получаем

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{r + \mu}{1 - \varepsilon/\delta}. \qquad (3.56)$$

Условие $\delta > 1 > \varepsilon$ обеспечивает неравенство $r + \mu/1 - \varepsilon/\delta) > 0$. Вместе с обычными неоклассическими условиями

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

это обеспечивает существование единственного решения K^* уравнения (3.56).

Условие же $\dot{q}_2 = 0$ вместе с (3.50) дает

$$\frac{\partial u}{\partial P} = (r + \gamma)\,q_2 = -\frac{r + \gamma}{\delta}\,\frac{\partial u}{\partial c}$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial P} \Big/ \frac{\partial u}{\partial c} = \frac{r + \gamma}{\delta}. \qquad (3.57)$$

Поскольку $(r + \gamma)/\delta > 0$, то наше предположение о характере замещения функции $u(c, P)$, сделанное в начале данного параграфа, позволяет утверждать, что кривая, определяемая уравнением (3.57) в плоскости (c, P), монотонно убывает от $+\infty$ до 0 при возрастании c от 0 до ∞.

Исключая β из системы уравнений (3.52), (3.53), находим зависимость между K^* и P:

$$\alpha\delta F(K^*, L) = -\mu\delta K^* + \gamma P + (\delta + \varepsilon) F(K^*, L).$$

Вспоминая, что $c=\alpha F(K^*, L)$, получаем зависимость между c и P:

$$\delta c = -\delta\mu K^* + \gamma P + (\delta - \varepsilon) F(K^*, L). \qquad (3.58)$$

Поскольку, как мы уже знаем, значение K^* определено и единственно, то уравнение (3.58) определяет в плоскости (c, P) прямую с углом наклона $\delta/\gamma>0$. Следовательно, система уравнений (3.57), (3.58) имеет единственное решение (c^*, P^*), где $c^*>0$, $P^*>0$.

Случай 2. (Темный век.)

Здесь $\theta<0$ и потому $\beta=0$. Из (3.55) тогда получаем

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{r+\mu}{1+q_2/q_1},$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{r+\mu}{1+\dfrac{1}{\gamma+r}\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial P}}{\dfrac{\partial u}{\partial c}}}. \qquad (3.59)$$

При $\beta=0$, $P=(\varepsilon/\gamma)F(K, L)$. Поэтому уравнение (3.59) определяет P как неявную функцию от K, и можно вычислить производную dP/dK. Мы не будем приводить здесь эти несложные, но громоздкие преобразования. Скажем только, что из явного вида dP/dK и предположения о характере замещения функции u вытекает, что $dK/dP<0$. Вместе с тем для функции

$$P = \frac{\varepsilon}{\gamma} F(K, L) \qquad (3.60)$$

имеет место $dK/dP>0$. Следовательно, существует единственное решение K^{**}, P^{**} системы уравнений (3.59) и (3.60). В таком случае из уравнения (3.52) при $\beta=0$ определяется единственное значение c^{**}: $c^{**}=\alpha^{**}F(K^{**}, L)=F(K^{**}, L)-\mu K^{**}$. Итак, в случае 2 также существует единственное положение равновесия (c^{**}, P^{**}), где $P^{**}=(1/\gamma)F(K^{**}, L)$.

§ 3. Эндогенный научно-технический прогресс

В этом параграфе мы рассмотрим модель, посвященную одному из самых интересных, на наш взгляд, вопросов — изучению управляемого эндогенного научно-технического прогресса в агрегированных макроэкономических моделях, базирующихся на понятии производственной функции.

Мы уже встречались в гл. 1 с различными типами научно-технического прогресса, выражающегося в изменении со временем производственной функции. В моделях § 1, 2 можно было бы ввести учет научно-технического прогресса, скажем, нейтрального по Хиксу (например, рассматривая производственную функцию вида $e^{\lambda t} \sim F(K, L)$), что не слишком усложнило бы исследование этих моделей. Однако технические изменения, учитываемые таким образом, являются экзогенными (внешними) по отношению к модели. Они обусловлены факторами, не входящими в модель. Вместе с тем даже если речь идет не о всем народном хозяйстве, а лишь об отдельной его отрасли, то ее технический прогресс во многом определяется внутри самой отрасли — политикой капиталовложений в отраслевые НИИ, КБ, опытное производство и т. д.

Изучение влияния научных исследований на темпы роста промышленного производства и связанные с этим вопросы эффективности капиталовложений «в науку», определения рациональной доли общественного продукта, выделяемой на научные исследования, — все это приобретает в последнее время все большее значение.

Приведем одну из моделей описывающую влияние эндогенного научно-технического прогресса на общественное производство [41]. Рассмотрим односекторную замкнутую модель экономики, динамика которой определяется тем, в какой пропорции делится национальный доход между капиталовложениями на расширение основных фондов и на улучшение производства («на науку»). Для простоты считаем, что потребление отсутствует. (Можно было бы, например, считать, что норма потребления фиксирована, т. е. составляет заданную долю национального дохода, но это то же самое, что рассматривать другую производственную функцию.) Будем считать, что вложения в «науку» действуют таким образом, что мы имеем дело с прогрессом, нейтральным по Хиксу, т. е. величина Y выпуска определяется формулой

$$Y = A(Q) F(K, L), \tag{3.61}$$

где K и L, как обычно, — объем основных фондов и трудовых ресурсов; $F(K, L)$ — производственная функция; Q — суммарный объем капиталовложений в научно-технический прогресс; $A(Q)$ — мультипликатор прогресса, показывающий эффективность затрачиваемых на «науку» средств.

Относительно производственной функции $F(K, L)$ будем по-прежнему считать, что она удовлетворяет неоклассическим условиям (см. с. 148) и, кроме того, имеет вид $F(K, L) = g(K) h(L)$. Например, функция Кобба — Дугласа удовлетворяет этому условию.

На мультипликатор прогресса $A(Q)$ также наложим условия, аналогичные неоклассическим: $A'(Q) > 0$, $A''(Q) < 0$, $A(0) = 1$,

$$\lim_{Q \to \infty} A(Q) = \infty, \quad \lim_{Q \to \infty} A'(Q) = 0, \quad \lim_{Q \to 0} A'(Q) = \infty.$$

Пусть u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, — норма накопления, т. е. доля национального дохода Y, направляемая на увеличение основных фондов. Тогда

$$\dot{K} = uY = uA(Q) g(K) h(L). \tag{3.62}$$

Величина $1 - u$ представляет собой долю национального дохода Y, направляемую «на науку», в научно-технический прогресс. Следовательно,

$$Q = (1 - u) Y = (1 - u) A(Q) g(K) h(L). \tag{3.63}$$

Наконец, относительно трудовых ресурсов L будем считать, что их рост подчиняется закону

$$L = p(L), \tag{3.64}$$

где $p(L)$ — такая функция, что величина L не может стать бесконечной за конечное время.

Пусть (K_0, Q_0, L_0) — произвольное начальное состояние. Задание управления $u(t)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant u(t) \leqslant 1$, позволяет из уравнений (3.62) — (3.64) определить траекторию $(K(t), Q(t), L(t))$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу: за кратчайшее время достигнуть заданного уровня $\bar{K}$ объема основных фондов.

Решение этой задачи проведем с помощью принципа максимума.

Предварительно отметим следующее. Описанная в математическом введении задача 1 на быстродействие обладает тем очевидным свойством, что если оптимальная траектория с началом x^0 проходит через точку x^1, то отрезок этой траектории с началом x^1 до многообразия M будет также оптимальным. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что оптимальное управление в каждой точке фазовой плоскости зависит лишь от самой этой точки (ее координат). Поэтому часто оказывается естественным искать оптимальное управление в задаче 1 не в виде $u(t)$, а в виде $u(x)$, где x — точка фазовой плоскости.

Оптимальное управление вида $u(x)$ называется синтезирующим.

Все сказанное относится и к рассматриваемой задаче. Будем искать оптимальное управление в виде $u(K, Q, L)$. На самом деле окажется, что оптимальное управление в данном случае зависит только от K, Q.

В дальнейшем будем любую траекторию, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности — принципу максимума, называть экстремалью.

В нашей задаче терминальное многообразие задается уравнением

$$K-\bar{K}=0. \tag{3.65}$$

Пусть ψ_1, ψ_2, ψ_3 — двойственные переменные, соответствующие уравнениям (3.62)—(3.64). Тогда функция Гамильтона для нашей задачи имеет вид

$$\mathcal{H}=\psi_1 uY+\psi_2(1-u)Y+\psi_3 p(L), \tag{3.66}$$

где $Y=A(Q)g(K)h(L)$, сопряженная система такова:

$$\dot{\psi}_1=-\psi_1 u\frac{\partial Y}{\partial K}-\psi_2(1-u)\frac{\partial Y}{\partial K}, \tag{3.67}$$

$$\dot{\psi}_2=-\psi_1 u\frac{\partial Y}{\partial Q}-\psi_2(1-u)\frac{\partial Y}{\partial Q}, \tag{3.68}$$

$$\dot{\psi}_3=-\psi_1 u\frac{\partial Y}{\partial L}-\psi_2(1-u)\frac{\partial Y}{\partial L}-\psi_3 p'(L). \tag{3.69}$$

Условия трансверсальности для многообразия (3.65) имеют вид

$$\psi_1(T)=1,\ \psi_2(T)=\psi_3(T)=0. \tag{3.70}$$

Если $u(t)$ — оптимальное управление, то оно в каждый момент времени максимизирует функцию $\mathcal{H}$. Из выражения (3.66) для $\mathcal{H}$ получаем, что $u=0$ при $\psi_1<\psi_2$, $u=1$ при $\psi_1>\psi_2$.

В случае $\psi_1=\psi_2$ значение управления u непосредственно из условия максимума функции $\mathcal{H}$ определить нельзя. Имеется две возможности: либо вдоль оптимальной траектории равенство $\psi_1=\psi_2$ сохраняется тождественно в течение некоторого интервала времени, либо оно имеет место лишь в одной точке. Рассмотрим первую возможность: $\psi_1\equiv\psi_2$. В таком случае $\dot\psi_1=\dot\psi_2$ и из (3.67) и (3.68) получаем

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{\partial Y}{\partial Q}. \tag{3.71}$$

Поскольку $Y=A(Q)g(K)h(L)$, то

$$\frac{\partial Y}{\partial K}-\frac{\partial Y}{\partial Q}=A'(Q)g'(K)h(L)\left(\frac{A(Q)}{A'(Q)}-\frac{g(K)}{g'(K)}\right),$$

и (3.71) эквивалентно уравнению

$$\frac{A(Q)}{A'(Q)}=\frac{g(K)}{g'(K)} \tag{3.72}$$

(так как $A'(Q)$, $g'(K)$, $h(L)>0$).

Поверхность в фазовом пространстве, определяемую уравнением (3.72), назовем особой поверхностью. Поскольку переменная L не участвует в уравнении (3.72), то особая поверхность является цилиндрической, ось которой параллельна оси координат $0L$. Направляющую кривую для особой поверхности в плоскости (K, Q), уравнение которой совпадает с (3.72), назовем особой кривой.

Выясним вид этой кривой. Пусть $\tilde A(Q)=A(Q)/A'(Q)$, $\tilde g(K)=g(K)/g'(K)$. Из условий на $A(Q)$ и $g(K)$ легко следует, что $\tilde A(Q)$ и $\tilde g(K)$ — монотонные функции, строго возрастающие от 0 до ∞ при стремлении их аргументов к бесконечности. Обозначив через $\tilde A^{-1}$ функцию, обратную к $\tilde A$, из (3.72) получаем $Q=\tilde A^{-1}\tilde g(K)$. Поскольку функция, обратная к возрастающей, сама возрастает, видим, что Q есть возрастающая функция аргумента K, определенная при всех $K>0$. Из (3.72) нетрудно также видеть, что $Q\to 0$ при $K\to 0$.

Таким образом, если оптимальная траектория $(Q(t), K(t), L(t))$ такова, что в течение некоторого времени $\psi_1(t)\equiv\psi_2(t)$, то эта траектория проходит по особой поверхности (3.72).

Отметим, что, как можно видеть из (3.72), выше особой кривой $\frac{A(Q)}{A'(Q)}-\frac{g(K)}{g'(K)}>0$, ниже ее $\frac{A(Q)}{A'(Q)}-\frac{g(K)}{g'(K)}<$ <0. Это же верно для выражения $\frac{\partial Y}{\partial K}-\frac{\partial Y}{\partial Q}$.

Займемся подробнее изучением поведения функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Учитывая, что все функции $u(t)$, $1-u(t)$, $\partial Y/\partial K$, $\partial Y/\partial Q$ неотрицательны, $\psi_1(T)=1$, $\psi_2(T)=0$, из системы уравнений (3.67)—(3.68) можно получить, что $\psi_2(t)>0$, $\psi_2(t)>0$ при $t<T$. Пусть $\varphi=\psi_1-\psi_2$. Тогда из (3.67)—(3.68)

$$\dot{\varphi}=\dot{\psi}_1-\dot{\psi}_2=(u\psi_1+(1-u)\psi_2)\left(\frac{\partial Y}{\partial Q}-\frac{\partial Y}{\partial K}\right).$$

Отсюда видно, что знак $\dot{\varphi}$ определяется знаком $\frac{\partial Y}{\partial Q}-\frac{\partial Y}{\partial K}$. Следовательно, выше особой кривой $\dot{\varphi}<0$, ниже особой кривой $\dot{\varphi}>0$.

В дальнейшем мы покажем, что если экстремальная траектория проходит через точку фазовой плоскости, лежащую выше особой кривой, то она обязательно пересекает особую кривую. Отсюда вместе с условием $\dot{\varphi}<0$ будет вытекать, что всюду выше особой кривой на экстремальных траекториях $u\equiv 1$.

Для выяснения поведения экстремальных траекторий ниже особой кривой попытаемся найти множество точек, в которых функция φ обращается в ноль.

На терминальном многообразии, как мы видели, $1=\psi_1(T)>\psi_2(T)=0$. В силу непрерывности функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, в некоторой окрестности терминального многообразия имеет место неравенство $\psi_1>\psi_2$, т. е. оптимальное управление $u(t)$ равно 1.

Изучим поведение экстремальных траекторий при $u \equiv 1$. Прямая и сопряженная системы при $u \equiv 1$ имеют вид

$$\dot{K} = Y = A(Q)\, g(K)\, h(L), \tag{3.73}$$

$$\dot{Q} = 0,$$

$$\dot{L} = p(L);$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{\partial Y}{\partial K} = -\psi_1 A(Q)\, g'(K)\, h(L), \tag{3.74}$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 \frac{\partial Y}{\partial Q} = -\psi_1 A'(Q)\, g(K)\, h(L), \tag{3.75}$$

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_1 \frac{\partial Y}{\partial L} - \psi_3 p'(L).$$

Вычислим функцию $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ в этом случае. Из уравнений (3.73) и (3.74) получаем

$$\frac{dK}{g(K)} = A(Q)\, h(L)\, dt = -\frac{d\psi_1}{g'(K)\, \psi_1},$$

или $dg(K)/g(K) = -d\psi_1 \psi_1$. Интегрируя по времени от t до T и учитывая, что $K(T) = \bar{K}$, $\psi_1(T) = 1$, получаем $\psi_1(t) = g(\bar{K})/g(K)$. Подставляя это выражение в (3.75) и вновь интегрируя с учетом того, что $\psi_2(T) = 0$, $Q(t) \equiv \equiv Q(T)$, имеем

$$\psi_2(t) = g(\bar{K})\, A'(Q(T)) \int_t^T h(L(\tau))\, d\tau.$$

Отсюда

$$\psi_1 - \psi_2 = g(\bar{K}) \left[\frac{1}{g(K)} - A'(Q(T)) \int_t^T h(L(\tau))\, d\tau \right].$$

Как и должно быть, при $t = T$ получаем $\psi_1 - \psi_2 = 1$. При уменьшении t оптимальное управление остается равным 1 до тех пор, пока $\psi_1 > \psi_2$, т. е. до момента $\hat{t}$, являющегося наибольшим корнем уравнения

$$\int_t^T h(L(\tau))\, d\tau = \frac{1}{g(K)\, A'(Q(T))}. \tag{3.76}$$

Найдем уравнение множества точек в фазовом пространстве, соответствующих точкам экстремальных траекторий в момент $\hat{t}$. Для этого выразим интеграл от $h(L)$, проинтегрировав уравнение (3.73):

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{K}^{\bar{K}}\frac{dK}{g(K)}=\int_{t}^{T}h(L(\tau))\,d\tau.$$

Здесь мы вновь учли, что при $u\equiv 1$ величина Q постоянна. Отсюда и из (3.76) получаем

$$g(K)\int_{K}^{\bar{K}}\frac{dK}{g(K)}=\frac{A(Q)}{A'(Q)}. \tag{3.77}$$

Перепишем (3.77) в виде

$$\tilde{A}(Q)=\left(g(K)\int_{K}^{\bar{K}}\frac{dK}{g(K)}\right)$$

или

$$Q=\tilde{A}^{-1}\left(\left[g(K)\int_{K}^{\bar{K}}\frac{dK}{g(K)}\right]\right). \tag{3.78}$$

Уравнение (3.78) задает в плоскости $(K,\ Q)$ некоторую кривую, вид которой нам необходимо выяснить. Из (3.77) непосредственно видно, что если $K=0$, или $K=\bar{K}$, то $Q=0$.

Особая кривая (3.72) и кривая (3.78) имеют единственную общую точку пересечения (если не считать точку $K=0$), определяемую из уравнения

$$\int_{K}^{\bar{K}}\frac{dK}{g(K)}=\frac{1}{g'(K)}. \tag{3.79}$$

Поскольку $g(K)$ растет с ростом K, а $g'(K)$ убывает, то левая часть уравнения (3.79) является функцией, убывающей от ∞ до 0, правая — возрастающая от 0 до ∞. Следовательно, уравнение (3.79) имеет единственный корень, который мы обозначим K_p. Соответствующее значение Q, определяемое из (3.78), обозначим Q_p. Вычислим производную функции (3.78):

$$Q'_K = \frac{\frac{A(Q)}{A'(Q)}\,\frac{g'(K)}{g(K)} - 1}{\left(\frac{A(Q)}{A'(Q)}\right)'}.$$

Данное выражение несложно получается, если дифференцировать неявное задание (3.77) функции Q.

Видим, что $Q'_K = 0$, как раз когда $\frac{A(Q)}{A'(Q)} = \frac{g(K)}{g'(K)}$, т. е. в точке K_p. При $K < K_p$ производная $Q'_K > 0$, при $K > K_p$ — $Q'_K < 0$. Таким образом, K_p — вершина кривой (3.78). Если (P_0, Q_0) лежит выше особой кривой, то возможны два случая: $Q_0 > Q_p$ и $Q_0 \leqslant Q_p$. В первом случае уравнение (3.77) решений не имеет и поэтому для экстремальной траектории $u \equiv 1$. Во втором случае экстремаль обязательно пересекает особую кривую, что означает, как отмечено выше, что всюду над особой кривой $u \equiv 1$. Правую ветвь кривой (3.78), т. е. при $K \geqslant K_p$, назовем кривой переключения. На рис. 8 сплошной линией изображена особая кривая, пунктирной — линия переключения

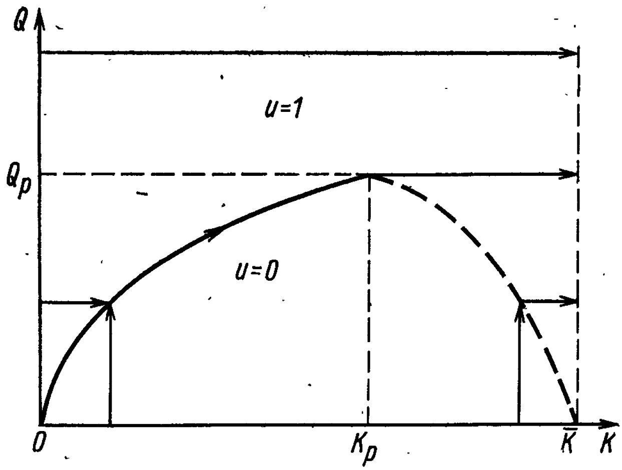

Рис. 8

Непрерывную кривую, составленную из особой кривой при $0 \leqslant K \leqslant K_p$ и кривой переключения, назовем обобщенной кривой переключения и обозначим Λ.

Как мы видели, справа от кривой переключения на экстремальных траекториях $\varphi > 0$ (и значит, $u \equiv 1$). На самой кривой переключения $\varphi = 0$. Вспоминая, что ниже особой кривой $\varphi > 0$, получаем, что в области под кривой Λ $\varphi < 0$, т. е. на экстремальных траекториях $u \equiv 0$.

Таким образом мы почти полностью выяснили поведение оптимальных управлений во всех точках фазовой плоскости (K, Q): выше кривой $\Lambda - u \equiv 1$, ниже кривой $\Lambda - u \equiv 0$.

Значение управлений в точках кривой переключения не играет роли — можно считать, например, $u = 1$. Осталось найти значение оптимального управления на особой кривой. Это нетрудно. Из уравнения (3.72) можно найти dQ/dK, т. е. выяснить, каким образом должны быть связаны скорости изменения величин Q и K, чтобы точка (K, Q) двигалась вдоль особой кривой:

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{\tilde{g}'(K)}{\tilde{A}'(Q)}.$$

С другой стороны, из (3.62), (3.63) получаем

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{1-u}{u}. \quad \text{Отсюда} \quad u^* = \frac{\tilde{A}'(Q)}{\tilde{A}'(Q) + \tilde{g}'(K)}.$$

На рис. 8 стрелками показаны типичные экстремальные траектории нашей задачи. Окончательно

$$u(K, Q, L) = \begin{cases} 1, & \text{если } (K, Q) \text{ выше } \Lambda, \\ 0, & \text{если } (K, Q) \text{ ниже } \Lambda, \\ u^*, & \text{если } (K, Q) \in \Lambda. \end{cases} \qquad (3.80)$$

Видим, что из каждой точки (K_0, Q_0, L_0) фазового пространства идет единственная траектория, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина. Используя теорему Филиппова [34], можно показать, что в нашей задаче существует оптимальная траектория для любого начального состояния (K_0, Q_0, L_0) и любого $\overline{K} > K_0$. Отсюда вытекает, что единственная экстремальная траектория является оптимальной и формула (3.80) описывает оптимальный синтез. Тем самым поставленная нами задача решена. Обсудим это решение с экономической точки зрения.

Из полученного описания оптимальных траекторий видно, что типичным является следующий случай: если K_0 много меньше $\bar{K}$, то вначале траектория выходит на особую поверхность и движется по ней до пересечения с поверхностью переключения, после чего сходит с особой поверхности.

Из (3.79) можно показать, что величина K_p неограниченно растет с ростом $\bar{K}$. В самом деле, используя условие $\lim\limits_{K\to\infty} g'(K)=0$, получаем, что при больших K $g(K)<K$, т. е. $1/g(K)>1/K$. Отсюда уж непосредственно видно, что интеграл $\int\limits_K^{\bar{K}} \frac{dg}{g(K)}$ неограниченно растет с ростом $\bar{K}$ при фиксированном K. Поэтому если предположить, что $K_p(\bar{K})$ есть величина ограниченная, скажем, числом $\tilde{K}_p$, то получим противоречивое неравенство

$$\int\limits_{\tilde{K}_p}^{\infty} \frac{dK}{g(K)} \leqslant \frac{1}{g'(\tilde{K}_p)}.$$

Неограниченный рост величины $K_p(\bar{K})$ означает, в частности, что при увеличении величины $\bar{K}$ отрезок времени, в течение которого оптимальная траектория находится на особой поверхности, неограниченно увеличивается. По аналогии с тем же феноменом при исследовании оптимальных траекторий в модели Леонтьева (ч. I, теорема Моришимы), назовем особую поверхность магистралью.

Поскольку уравнение магистрали имеет вид $\partial Y/\partial K = \partial Y/\partial Q$, то ее экономическая характеристика такова: на этой поверхности и только на ней предельная фондоотдача (норма эффективности накопления) и норма эффективности капиталовложений в научно-технический прогресс равны. Следовательно, оптимальное управление подчиняется такому правилу: если цель достаточно удалена, то все капиталовложения следует направлять в ту область, где норма эффективности больше. На магистрали капиталовложения должны распределяться в такой пропорции, чтобы равенство норм эффективности сохранялось тождественно.

Если же руководствоваться двойственными переменными, интерпретируя их как цены оптимального плана (с точностью до положительного множителя), то здесь алгоритм оптимальности еще проще: независимо от соотношения K_0 и $\bar{K}$ определяется оптимальное управление u по соотношению ψ_1 и ψ_2.

Интересен тот факт, что уравнение особой поверхности и оптимальное управление на ней сохраняется для обширного класса целевых функций. В качестве иллюстрации к этому утверждению рассмотрим еще одну постановку нашей задачи: за кратчайшее время достигнуть заданную величину $\bar{Y}$ выпуска. В этом случае Гамильтонова система уравнений остается прежней: (3.62)—(3.64), (3.67)—(3.69), — меняется лишь уравнение терминального многообразия, которое имеет вид $Y(Q, K, L)=\bar{Y}$. В соответствии с этим уравнение особой

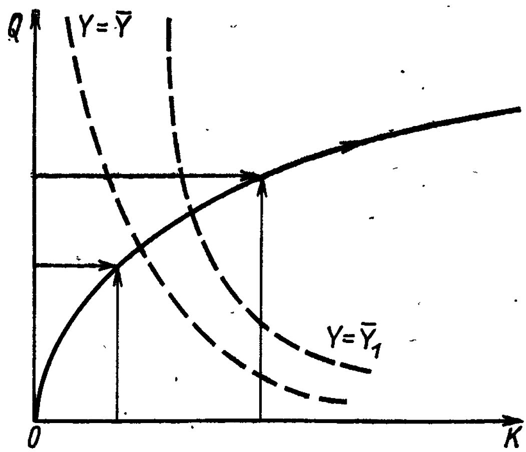

Рис. 9

поверхности имеет такой же вид. Условие трансверсальности в данном случае дает $\psi_1(T)=\partial Y/\partial K$, $\psi_2(T)=\partial Y/\partial Q$, $\psi_3(T)=\partial Y/\partial L$. Поскольку все эти величины положительны, то остается справедливым вывод о том, что выше особой поверхности функция φ убывает, ниже ее — растет.

Если экстремальная траектория выходит на терминальное многообразие таким образом, что проекция точки $(K(T), Q(T), L(t))$ на плоскость (K, Q) лежит выше магистральной (особой) кривой, то, как мы видели, в этой точке $\partial Y/\partial K > \partial Y/\partial Q$, т. е. $\varphi=\psi_1-\psi_2>0$. Следовательно, в любой точке выше магистрали $\varphi>0$ и оптимальное управление $u\equiv 1$.

Аналогично показывается, что ниже магистральной кривой $u\equiv 0$. Следовательно, экстремальные траектории в данной задаче устроены проще, чем в предыдущей. Поскольку из каждой начальной точки (K_0, Q_0, L_0) идет только одна экстремальная кривая, то она является оптимальной. Проекция оптимального синтеза изображена на рис. 9.

Следует обратить внимание на то, что оптимальное управление не зависит от того, чему равен желаемый уровень выпуска $\bar{Y}$: для любого начального состояния (K_0, Q_0, L_0) выгодно выйти на магистраль и идти вдоль нее, даже если в процессе развития решено изменить цель и достичь за кратчайшее время другого уровня выпуска $\bar{Y}_1$. Этот вывод является подтверждением целесообразности практики скользящего планирования.

Задачи

1. Показать, что если хотя бы один из коэффициентов α, β эластичности по ресурсам линейно-однородной двухфакторной производственной функции $F(K, L)$ не зависит от (K, L), то $F(K, L)$ является функцией Кобба — Дугласа.

2. Показать, что если предельная норма замещения S для линейно-однородной двухфакторной производственной функции $F(K, L)$ не зависит от (K, L), то $F(K, L)=AK+BL$, где A, B — константы.

3. Показать, что функция

$$F = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho}]^{-1/\rho},$$

где $A>0$, $0<\delta<1$, при $\rho< -1$ не является вогнутой.

4. Для линейно-однородной функции $F(K, L)$ выяснить связь решений задач

$$\max F(K, L), \quad p_1K + p_2L = c, \qquad \text{и} \qquad \min(p_1K + p_2L), \quad F(K, L) = Y.$$

5. Доказать, что в случае технического прогресса, нейтрального по Солоу, производственная функция имеет вид (3.16).

6. Доказать, что однородная степени α функция одного переменного имеет вид Ax^{α}.

7. Доказать теорему Эйлера: если $f(x)$ — дифференцируемая однородная степени α функция, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = \alpha f(x).$$

Указание: вычислить производные функции $\varphi(t) = f(tx)$ и $\psi(t) = t^{\alpha} f(x)$ в точке $t=1$.

8. Доказать, что если $f(x)$ — дифференцируемая однородная степени α функция, то функции $\partial f/\partial x_i$, $i=1, 2, ..., n$, однородны степени $\alpha-1$.

9. Пусть $F(K, L)$ — линейно-однородная производственная функция. Показать $\partial^2 F/\partial K \partial L > 0$.

10. Рассмотрим задачу оптимального выпуска производственного сектора в модели Вальда — Касселя (см. ч. II., гл. 2, § 3)

$$\max (p, z),$$

$$zA \leqslant b,$$

$$z \geqslant 0.$$

Оптимальное значение линейной формы при фиксированных ценах p на продукты производства обозначим $f(b)$. Показать, что а) функция $f(b)$ линейно-однородна; б) функция $f(b)$ вогнута. Другими словами, $f(b)$ обладает основными свойствами производственной функции.

11. Показать, что для производственной функции Леонтьева $F(K, L) = \min\{aK, bL\}$ предельная норма замещения S равна ∞, т. е. факторы не заменяемы. При этом, естественно, эластичность замещения σ равна 0.

12. Доказать

$$\lim_{\rho \to \infty} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho}]^{-1/\rho} = \min\{K, L\}.$$

Напомним, что $\rho \to \infty$ при $\sigma \to 0$ $(\rho = (1-\sigma)/\sigma)$.

13. Пусть $x \in R_+^n$, $\lambda > 0$. Обозначим через $\lambda(i)$ отображение $\lambda(i): R_+^n \to R_+^n$, определяемое следующим образом. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\lambda(i)\,x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{i-1}, x_i, \lambda x_{i+1}, \ldots, \lambda x_n).$$

Доказать, что если функция $f(x)$ такова, что $f(\lambda(i)\,x = \lambda^{\alpha_i} f(x)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$f(x) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

14. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех неотрицательных, вогнутых линейно-однородных функций на $R^n{}_+$. Сопоставим всякой функции $f(x) \in \mathcal{F}$ функцию

$$f^*(y) = \inf_{x \geqslant 0} \frac{(x, y)}{f(x)}, \quad y \in R_+^n.$$

Показать, что $f^*(y) \in \mathcal{F}$. Вычислить f^* для функций $F(K, L) = aK + bL$; $F(K, L) = \min\{aK, bL\}$; $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$; показать, что для этих функций $f^{**} \equiv f$ (Г. Б. Клейнер).

Заключение

Мы рассмотрели некоторые экономико-математические модели. Эти модели отличаются в основном различной степенью агрегирования — от модели Вальраса, изучающей экономику народного хозяйства в полностью дезагрегированном виде, моделей Леонтьева — Неймана — Гейла, рассматривающих экономику как совокупность взаимосвязанных отраслей, мы пришли к моделям на языке производственных функций, оперирующих максимально агрегированными показателями. Замечательно, что исторически перечислённые экономико-математические модели появились именно в таком порядке, хотя в работах традиционно-экономического плана идея агрегирования появлялась и раньше. Стремление к большей степени агрегации объясняется требованиями практики — возможностью сбора и обработки информации.

К настоящему времени можно считать практически апробированными модели с использованием производственных функций и модель межотраслевого баланса. Говорить же об опыте практического применения модели Неймана и модели Вальраса, несмотря на их несомненную теоретическую ценность, пока преждевременно.

Целью книги было дать представление о каждой изучаемой модели в общих чертах. Подробное же их исследование, ориентированное на практические (в той или иной мере) применения, приносит, конечно, массу дополнительных проблем более частного характера. Так, например, методике применения простейшей с теоретической точки зрения схемы межотраслевого баланса посвящена обширнейшая литература. Что же касается производственных функций, то сама задача построения такой конкретной функции ставит сложные вопросы, относящиеся к теории статистической обработки информации (см., например, [42]).

Стоит отметить, что современный этап экономико-математического моделирования не является, по мнению автора, последним. Напротив, становится ясной необходимость расшифровать процесс управления экономикой народного хозяйства соответственно существующей иерархической структуре управления. Возможно, что путь к более содержательным моделям лежит через намечающееся в последнее время сближение теории экономико-математического моделирования и теории игр с непротивоположными интересами.

Литература

1. Вальрас Л. (Walras L.) Eléments d'Economie Politique Pure. Lausanne, 1874. (Англ. перев. Elements of Pure Economies. London, 1954.)

2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.

3. Ланкастер К. Математическая экономика. М., «Сов. радио», 1972.

4. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. М., «Наука», 1972.

5. Черемных Ю. Н. Качественное исследование оптимальных траекторий динамических моделей экономики. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.

6. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., «Наука», 1973.

7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., «Прогресс», 1975.

8. Красс И. А. Математические модели экономической динамики. М., «Сов. радио», 1976.

9. Леонтьев В. Исследования структуры американской экономики. М., Госстатиздат, 1958.

10. Коссов В. В. Межотраслевой баланс. М., «Экономика», 1966.

11. Моделирование народнохозяйственных процессов. Ред. Дадаян В. С. М., «Экономика», 1973.

12. Гребцов Г. И., Смехов Б. М., Смоляр Л. И. Основы разработки межотраслевого баланса. М., Экономиздат, 1961.

13. Картер А. Структурные изменения в экономике США. М., «Статистика», 1974.

14. Самуэльсон П. А. (Samuelson P. A.) Abstract of a Theorem Concerning Substititability in Open Leontief Models.— In: Collected Scientific Papers. MIT Press. 1966, p. 36.

15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

16. Лош Е. (Loš J.) The approximative horizon in von Neumann models of optimal growth. Polish acad. Inst. of Math., Preprint, N 3., Sept. 1970.

17. Лош Е. (Loš J.) Horizon in Dynamic Programs. Proceedings of the Fifth Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1967, p. 479—490.

18. Кемени, Моргенштерн, Томпсон (Kemeny J. G., Morgenstern O., Thompson G. L.) A generalisation of the von Neumann model of an expanding economy. Econometrica, 1956. **24**, N 2, p. 115—135.

19. Гейл Д. Замкнутая линейная модель производства.— В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., ИЛ, 1959, с. 382—400.

20. Раднер Р. (Radner R.). Path of Economic Growth that are optimal with regard only to Final States: A Turnpike Theorem. Review of Economic Studies, 1961, **28**, p. 98—104.

21. Цукуи (Tsukui J.). Application of a turnpike theorem to planning for efficient accumulation: An example for Japan. Econometrica, 1968, **36**, N 1, p. 172—186.

22. Лурье А. Л., Нит И. В. Экономико-математическое моделирование социалистического хозяйства. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.

23. Дорфман Р., Самуэльсон П. А., Солоу Р. М. (Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M.) Linear programming and economic analysis., N. Y., McGrow Hill, 1958.

24. Красс И. А. Конфликтное взаимодействие двух линейных экономических моделей.—В кн.: Управляемые системы. Вып. 2. Новосибирск, СО АН СССР, 1969, с. 20—31.

25. Красс И. А., Полетаев И. А. Кооперация моделей Леонтьева.— «Кибернетика», 1971, № 1, с. 116—124.

26. Вальд А. (Wald A.) Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. Ergebn. Math. Colloq., 7 (1934—1935).

27. Вальд А. (Wald A.) Über die eindentige positive Lösbarkeit der neuen Produktions gleichungen. Ergebn. Math. Colloq., 6 (1933—1934).

28. Дебре Ж. (Debreu G.). Theory of Value. N. Y., 1959.

29. Слуцкий Е. (Slutsky E.). Sulla teoria del bilanico del consumatore., Giorn. Econ., 51, 1915.

30. Миркин Б. Г. Некоторые модели экономического равновесия.— В кн.: Математические методы в экономике. Под ред. Багриновского. Новосибирск, «Наука», 1968, с. 71—99.

31. Митягин Б. С. Заметки по математической экономике.— УМН, 1972, т. 27, вып. 3 (165), с. 3—9.

32. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

3. Габбасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974, гл. 2, § 3.

34. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., астроном., физ., хим.», 1959, вып. 2, с. 25—32.

35. Михалевский Б. Н. Система моделей средне-срочного народнохозяйственного планирования. М., «Наука», 1972.

36. Вейтцман М. (Weitzman M. L.) Soviet Postwar Economic Growth and Capital—Labor Substitution.— «The American Economic Review», vol. 60, N 4, 1970, p. 676—692.

37. Терехов Л. Л. Производственные функции. М., «Статистика», 1974.

38. Подузов А. А. Моделирование экономического роста в условиях научно-технического прогресса.— В кн.: Кибернетику на службу коммунизму. Т. 6. М., «Энергия», 1971, с. 83—112.

39. Шелл К. (Shell K.) Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change.— In: Essays on Theory of Optimal Economic Growth., edited by K. Shell, MIT Press, 1967, p. 1—30.

40. Килер Э., Спенс М., Зекхаузер П. Оптимальный контроль над загрязнением окружающей среды. — В кн.: Математическая экономика. М., «Мир», 1974, с. 46—63.

41. Зеликина Л. Ф. Оптимальные вложения в научно-технический прогресс в макроэкономических моделях и магистральные теоремы.— «Экономика и матем. методы», 1975, т. 11, вып. 3, с. 453—467.

42. Розанов Г. В. Статистическое моделирование развития отрасли. М., «Статистика», 1976.

43. Ашманов С. А. Математические модели в экономике. Ч. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.

44. Ашманов С. А. Математические модели в экономике. Ч. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.

Оглавление

Станислав Александрович
АШМАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Редактор *С. И. Зеленский*
Мл. редактор *В. В. Конкина*
Художественный редактор
М. Ф. Евстафиева
Переплет художника *Ю. Е. Фомина*
Технический редактор *К. С. Чистякова*
Корректоры *И. А. Большакова,*
Г. В. Зотова

Тематический план 1980 г. № 100
ИБ № 704

Сдано в набор 20.02.80
Подписано к печати 03.07.80
Л-113003 Формат $84 \times 108^1/_{32}$
Бумага тип. № 3
Гарнитура литературная
Высокая печать
Физ. печ. л. 6,25 Усл. печ. л. 10,5
Уч.-изд. л. 9,7
Зак. 308 Тираж 5360
Цена 45 коп. Изд. № 523

Издательство
Московского университета.
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы

Цена 45 коп.